# Gabarito

---

**Questão 1.** ........................................................................ ______/ 3 pts

Calcule a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \sin(4x)\, dx.$$

**Solução:** Primeiramente, vamos resolver a integral indefinida. Usando integração por partes,

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$dv = \sin(4x)\,dx \qquad v = -\frac{\cos(4x)}{4}$$

$$\int x^2 \sin(4x)\,dx = -\frac{x^2\cos(4x)}{4} + \int \frac{x\cos(4x)}{2}\,dx.$$

Aplicando-se a integração por partes novamente,

$$u = x \qquad du = 1\,dx$$

$$dv = \cos(4x)\,dx \qquad v = \frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\int x^2 \sin(4x)\,dx = -\frac{x^2\cos(4x)}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{x\sin(4x)}{4} - \int \frac{\sin(4x)}{4}\,dx\right).$$

Logo,

$$\int x^2 \sin(4x)\,dx = -\frac{x^2\cos(4x)}{4} + \frac{x\sin(4x)}{8} + \frac{\cos(4x)}{32} + C.$$

Agora, aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \sin(4x)\,dx = \left(-\frac{x^2\cos(4x)}{4} + \frac{x\sin(4x)}{8} + \frac{\cos(4x)}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{32} + \frac{\pi}{64}.$$

**Questão 2.** ........................................ ______/ 3,5 pts

Considere as funções $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = x\,(x-2)^2$.

(a) [1 pt] Determine os pontos de interseção dos gráficos.

(b) [1 pt] Esboce o gráfico de cada função separadamente.

(c) [0,5 pts] Agora, em um mesmo plano, faça o gráfico das duas funções e um esboço da região limitada entre os seus gráficos.

(d) [1 pt] Calcule a área desta região.

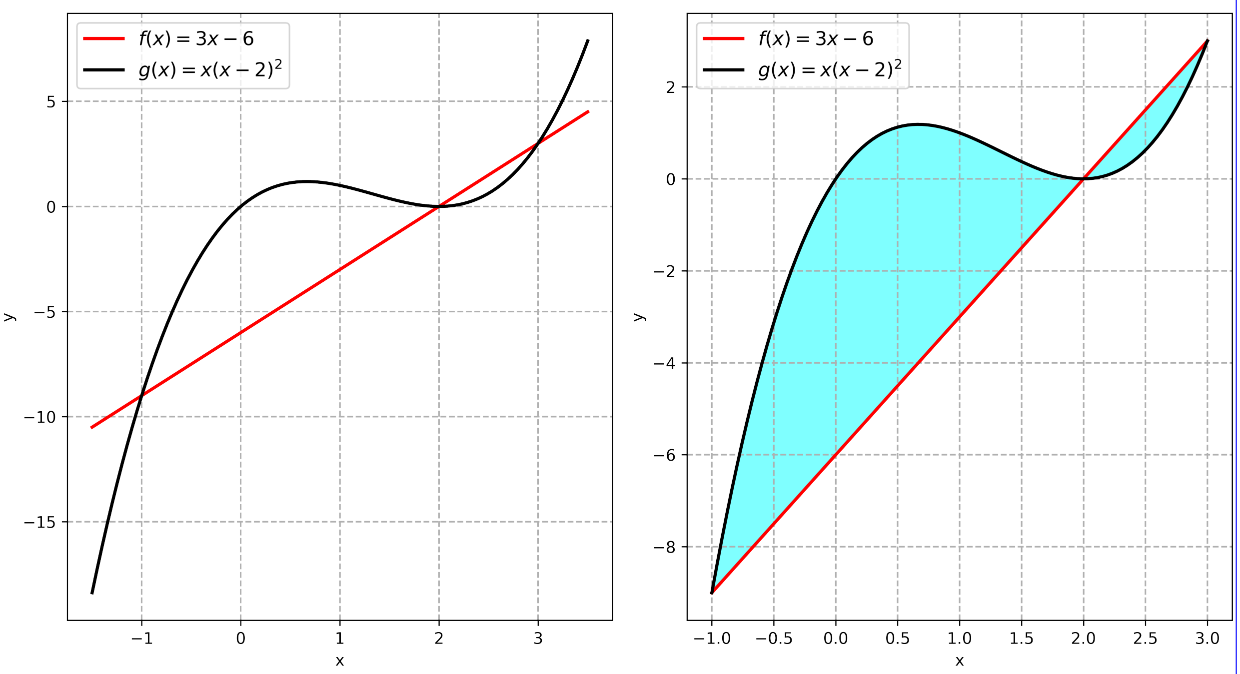
**Solução:**

(a) Determinando os pontos de interseção

$$\begin{aligned} 3x - 6 = x\,(x-2)^2 &\Rightarrow 3\,(x-2) = x\,(x-2)^2 \\ &\Rightarrow 3\,(x-2) - x\,(x-2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-2)(3 - x(x-2)) = 0 \\ &\Rightarrow (x-2)(-x^2 + 2x + 3) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

(b)

(c)




(d) Pelo gráfico, vemos que no intervalo $[-1, 2]$ a função $f(x) = 3x - 6$ está sempre abaixo da função $g(x) = x\,(x-2)^2$, e as posições se invertem no intervalo $[2, 3]$. Com isso, temos que a área é dada por:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{71}{6},$$

onde

$$A_1 = \int_{-1}^{2} (x\,(x-2)^2) - 3x - 6\,dx = \int_{-1}^{2} x^3 - 4x^2 + x + 6\,dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{x=-1}^{x=2} = \frac{45}{4}.$$

e

$$A_2 = \int_{2}^{3} (3x-6) - x\,(x-2)^2\ dx = \int_{2}^{3} -x^3 + 4x^2 - x - 6\,dx$$
$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{x=2}^{x=3} = \frac{7}{12}.$$

**Questão 3.** ........................................................................ ______/ 3,5 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 13y(t) = 13t^2 - 5t.$$

**Solução:**

**Solução da EDO homogênea**: Basta resolver a equação característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 - 3i \text{ e } \lambda_2 = -2 + 3i$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = \left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) e^{-2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Determinando uma Solução particular da EDO homogênea**: Vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Considere a solução da forma

$$y_p(t) = A + Bt + Ct^2.$$

Com isso,

$$y_p'(t) = B + 2Ct$$
$$y_p''(t) = 2C.$$

Substituindo na EDO temos:

$$2C + 4B + 13A + t\left(8C + 13B\right) + 13Ct^2 = 13t^2 - 5t.$$

Com isso, temos que

$$\begin{cases} 13C = 13 \\ 13B + 8C = -5 \\ 13A + 4B + 2C = 0. \end{cases}$$

Donde,

$$A = \frac{2}{13}, \ B = -1 \text{ e } C = 1.$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) e^{-2t} + t^2 - t + \frac{2}{13}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$