Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{2ty(t)}{1+t^2} = \cos(t)$$

Solução: Multiplicando-se a EDO pelo fator integrante $\mu = e^{\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt} = 1+t^2$, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(1+t^2\right)y(t)\right) = \left(1+t^2\right)\cos(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$(1+t^2)y(t) = \int \left(1+t^2\right)\cos(t)\,dt = -\sin(t) + 2t\cos(t) + t^2\sin(t) + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = -\frac{\sin(t)}{1+t^2} + \frac{2t\cos(t)}{1+t^2} + \frac{t^2\sin(t)}{1+t^2} + \frac{C_1}{1+t^2}.$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Considere a EDO:

$$y\cos(x) + 3\sin(x)y' = 0.$$

(a) Mostre que a EDO NÃO é exata.

(b) Mostre que $\mu(y) = y^2$ é um fator integrante que a torna exata.

(c) Agora resolva-a usando o método das equações exatas.

Solução:

(a) Sejam $M(x,y) = y\cos(x)$ e $N(x,y) = 3\sin(x)$ e note que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos(x) \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = 3\cos(x).$$

Portanto a EDO **não** é exata.

(b) Multiplicando-se a EDO por y^2 temos

$$y^3\cos(x) + 3y^2\sin(x)y' = 0.$$

Sejam $\tilde{M} = y^3\cos(x)$ e $\tilde{N} = 3y^2\sin(x)$ e note que

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 3y^2\cos(x) \text{ e } \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 3y^2\cos(x).$$

Neste caso a EDO é exata!

(c) Agora, devemos encontrar $\psi = \psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = y^3\cos(x) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3y^2\sin(x) \end{cases}$$

Integrando-se a primeira equação em relação a x, obtemos

$$\psi = \int y^3\cos(x)\,dx + g(y) = y^3\sin(x) + g(y).$$

Derivando-se em relação a y, temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3y^2\sin(x) + g'(y).$$

Da segunda equação do sistema, concluí-se que

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y^3\sin(x) = C.$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 6y(t) = e^{2t}.$$

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2 e^{2t} + C_1 e^{-3t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Determinando uma Solução particular da EDO homogênea: Vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Considere a solução da forma

$$y_p(t) = Ate^{2t}.$$

Com isso,

$$y_p'(t) = Ae^{2t} + 2Ate^{2t} \text{ e } y_p''(t) = 4A\,(1+t)\,e^{2t}.$$

Substituindo na EDO temos:

$$Ae^{2t} + 4A\,(1+t)\,e^{2t} - 4Ate^{2t} = e^{2t}.$$
$$\Rightarrow e^{2t} = 5Ae^{2t}$$

Donde,

$$A = \frac{1}{5}$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = C_2 e^{2t} + C_1 e^{-3t} + \frac{t}{5}e^{2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$