Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Calcule as integrais

(a) [1,5 pts] $\displaystyle\int e^{2x}\sin(x)\,dx$ (b) [1,5 pts] $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (c) [1 pt] $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$

Solução:

(a) Usando integração por partes,

$$u = e^{2x} \qquad du = 2e^{2x}\,dx$$
$$dv = \sin(x)\,dx \qquad v = -\cos(x)$$

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = -e^{2x}\cos(x) + \int 2e^{2x}\cos(x)\,dx.$$

Aplicando-se a integração por partes novamente

$$u = 2e^{2x} \qquad du = 4e^{2x}\,dx$$
$$dv = \cos(x)\,dx \qquad v = \sin(x)$$

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = -e^{-2x}\cos(x) + 2e^{2x}\sin(x) + \int -4e^{2x}\sin(x)\,dx.$$

Logo,

$$\int e^{2x}\sin(x)\,dx = \frac{2e^{2x}\sin(x)}{5} - \frac{e^{2x}\cos(x)}{5} + C.$$

(b) Vamos usar a seguinte substituição trigonométrica

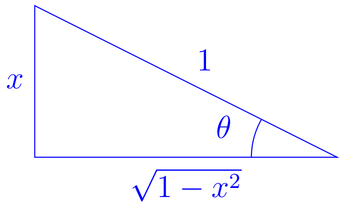
$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}(\theta), \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ dx = \cos(\theta)\,d\theta. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{|\cos(\theta)|}\cos(\theta)\,d\theta, \ \left(\cos(\theta) \ge 0 \text{ em } -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int 1-\cos(2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + C \\
&= \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2} + C \\
&\overset{(**)}{=} -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{asin}(x)}{2}
\end{aligned}$$

($*$) Vamos voltar para a variável anterior. Usando-se as relações trigonométricas do triângulo retângulo ao lado vemos que

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$$



(c) A integral é imprópria, pois a função não está definida em $x = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{b\to 0} \int_b^1 x^{-3}\,dx = \lim_{b\to 0} \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_{x=b}^{x=1} \\ &= \lim_{b\to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{b^2}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Questão 2. .... ______/ 2 pts

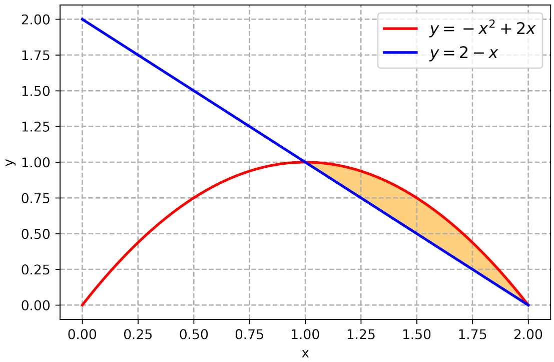
Considere as funções $y = -x^2 + 2x$ e $y = 2 - x$.

(a) [1 pt] Esboce a região limitada pelo gráfico dessas funções.

(b) [1 pt] Determine o volume do sólido obtido pela rotação dessa região em torno do eixo y.

Solução:

(a)



(b)

$$V = 2\pi \int_1^2 x\left(-x^2 + 3x - 2\right)\, dx = 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{\pi}{2}$$

Questão 3. .... ______/ 2 pts

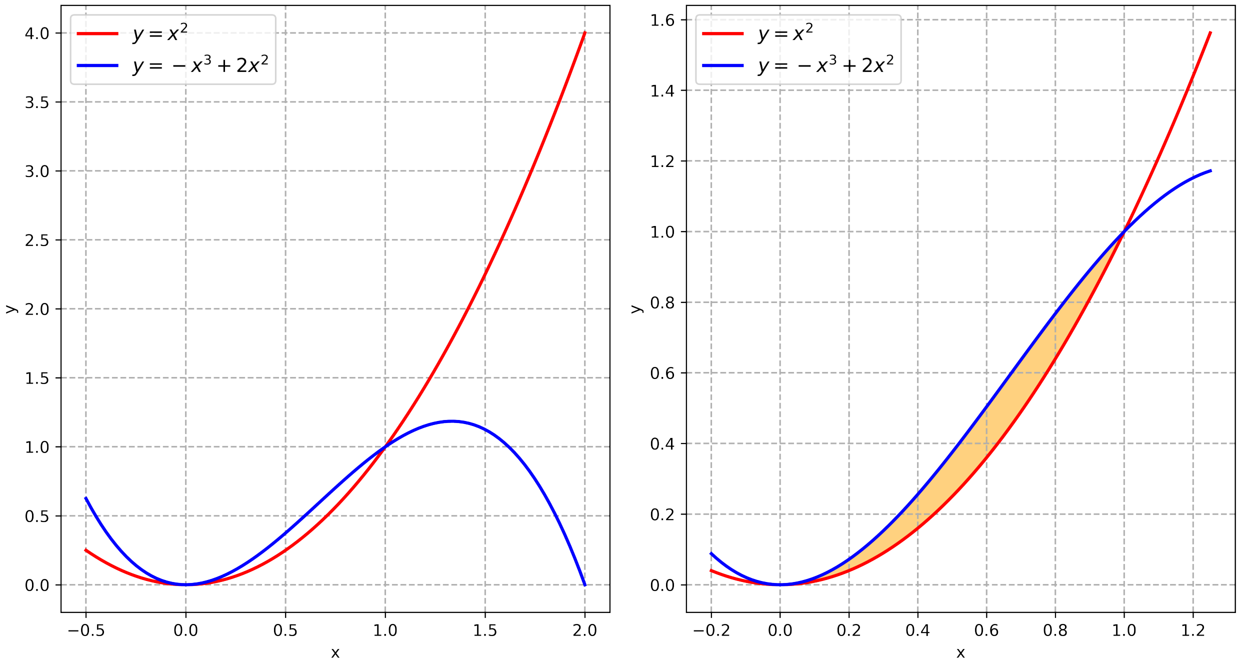
Considere as funções $y = x^2$ e $y = -x^3 + 2x^2$.

(a) Faça um esboço da região limitada entre o gráfico dessas duas funções.

(b) Calcule a área desta região.

Solução:

(a)



(b) Determinando os pontos de interseção

$$x^2 = -x^3 + 2x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Pelo gráfico, vemos que a função $y = x^2$ está sempre abaixo da função $y = -x^3 + 2x^2$. Com isso, temos que a área é dada por:

$$A = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2) - x^2\, dx = \int_0^1 -x^3 + x^2\, dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}.$$