Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Prova de
Cálculo II
01/12/2023 – 2023-2
Turma C1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \cos(t)$$

Solução: Multiplicando-se a EDO pelo fator integrante $\mu = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$, temos:

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y(t)) = e^{2t}\cos(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$e^{2t}y(t) = \int e^{2t}\cos(t)\,dt = \frac{2e^{2t}\cos(t)}{5} + \frac{e^{2t}\sin(t)}{5} + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \frac{2\cos(t)}{5} + \frac{\sin(t)}{5} + C_1e^{-2t}.$$

Questão 2. .... ________/ 3 pts

Mostre que a EDO é exata e dê a solução geral com base nesse método.

$$3x^2y^4 + 4x^3y^3y' = 0.$$

Solução: Sejam $M(x,y) = 3x^2y^4$ e $N(x,y) = 4x^3y^3$ e note que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = 12x^2y^3.$$

Portanto a EDO é exata. Neste caso, devemos encontrar $\psi = \psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 3x^2y^4 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 4x^3y^3 \end{cases}$$

Integrando-se a primeira equação em relação a x, obtemos

$$\psi = \int 3x^2y^4\,dx + g(y) = x^3y^4 + g(y).$$

Derivando-se em relação a y, temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 4x^3y^3 + g'(y).$$

Da segunda equação do sistema, concluí-se que

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$x^3y^4 = C.$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 25t.$$

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -i - 2, \quad \lambda_2 = i - 2$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = \left(C_2 \cos(t) + C_1 \sin(t)\right) e^{-2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Determinando uma Solução particular da EDO homogênea: Vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Considere a solução da forma

$$y_p(t) = B + At.$$

Com isso,

$$y_p'(t) = A \text{ e } y_p''(t) = 0.$$

Substituindo na EDO temos:

$$5B + 4A + 5At = 25t.$$

Donde,

$$A = 5 \text{ e } B = -4.$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \left(C_2 \cos(t) + C_1 \sin(t)\right) e^{-2t} - 4 + 5t, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$