Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Calcule as integrais

(a) [1 pt] $\displaystyle\int_1^2 x^4 + x^3\, dx$

(b) [1 pt] $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\, dx$

(c) [1 pt] $\displaystyle\int x^4 \log(x)\, dx$

(d) [1 pt] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+3}\, dx$

Solução:

(a)

$$\int_1^2 x^4 + x^3\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{199}{20}.$$

(b) Vamos usar a substituição trigonométrica. Primeiramente, note que

$$\sqrt{x^2+2} = \sqrt{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

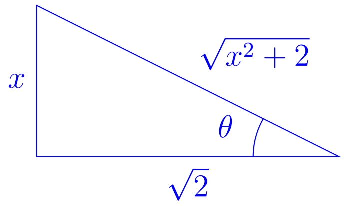
Com isso, vamos usar a seguinte substituição trigonométrica

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\tan(\theta),\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dx = \sqrt{2}\sec^2(\theta)\, d\theta. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{x\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{2}\tan(\theta)\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}\sqrt{2}\sec^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\tan(\theta)|\sec(\theta)|}\sec^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cos(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \operatorname{cosec}(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\log|\operatorname{cosec}(\theta) - \operatorname{cotg}(\theta)| + C \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}\right| + C
\end{aligned}$$

$(*)$ Vamos voltar para a variável anterior. Usando-se as relações trigonométricas do triângulo retângulo ao lado vemos que



$$\text{cotg}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{x} \quad \text{e} \quad \text{cosec}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

(c) Vamos resolver esta integral por partes. Fazendo

$$u = \log(x) \quad du = \tfrac{1}{x}dx$$

$$dv = x^4 dx \quad v = \tfrac{x^5}{5},$$

temos

$$\int x^4 \log(x)\, dx = \frac{x^5}{5}\log(x) - \int \frac{x^4}{5}\, dx = \frac{x^5 \log(x)}{5} - \frac{x^5}{25} + C.$$

(d) Primeiramente vamos resolver a integral indefinida. Fazendo a substituição $u = e^x + 3$, $du = e^x\, dx$ temos que

$$\int \frac{e^x}{e^x+3}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log(e^x+3) + c$$

Agora, vamos resolver a integral imprópria:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+3}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{e^x}{e^x+3}\, dx = \lim_{b\to\infty} \log(e^x+3)\Big|_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b\to\infty} \big(\log(e^b+3) - \log(4)\big) = \infty.\end{aligned}$$

Questão 2. .... ______/ 2 pts

Deterine o comprimento de arco do gráfico da função $y = \log(\cos(x))$ entre os pontos $x = 0$ e $x = \pi/3$.

Solução: Note que

$$y' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Com isso, o comprimento de arco é dado por:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2(x)}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/3} \sec(x)\,dx = \log|\sec(x)+\tan(x)|\Big|_{x=0}^{x=\pi/3} = \log\left(2+\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

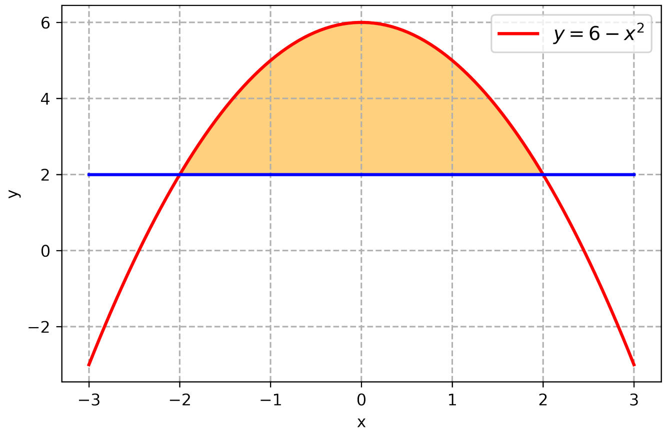
Questão 3. .... ______/ 2 pts

Considere o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelos gráficos das funções $y = 6 - x^2$ e $y = 2$.

(a) Faça um esboço da região e do sólido.

(b) Calcule o volume do sólido.

Solução:



Determinando os pontos de interseção

$$6 - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Pelo gráfico podemos ver que o sólido é simétrico em relação ao eixo y. Usando o método dos discos, temos que o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 (6 - x^2)^2 - 4\, dx = 2\pi \int_0^2 x^4 - 12x^2 + 32\, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 4x^3 + 32x \right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{384\pi}{5}. \end{aligned}$$