UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – CURO
Professor Reginaldo Demarque

1ª Prova de Cálculo II
31/05/2023 – 2023-1
Turma E1

Gabarito

---

1. Resolva as integrais:

(a) [1 pt] $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx$

(b) [2 pts] $\displaystyle\int x^2\cos(5x)\,dx$

(c) [1 pt] $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

(d) [2 pts] $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solução:

(a) Para resolver esta integral, vamos fazer a substituição $u = 1+x^3$, $du = 3x^2\,dx$. Substituindo essas expressões na integral, temos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}} + C$$

(b) Usando integração por partes com $u = x^2$, $dv = \cos(5x)\,dx$, $du = 2x\,dx$ e $v = \sin(5x)/5$

$$\int x^2\cdot\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x^2\cdot\sin(5x) - \frac{2}{5}\int x\cdot\sin(5x)\,dx$$

A segunda parte da integral pode ser resolvida novamente usando integração por partes com $u = x$, $dv = \sin(5x)\,dx$, $du = dx$ e $v = -\cos(5x) - 5$, daí,

$$\int x\cdot\sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{25}\int \cos(5x)\,dx$$

Agora, podemos integrar a última parte:

$$\int \cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$$

Substituindo essa última integral de volta na segunda parte da integral original, obtemos:

$$\int x\cdot\sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right) + C$$

Agora, substituindo essa segunda parte de volta na primeira integral, temos a solução final:

$$\int x^2\cdot\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x^2\cdot\sin(5x) - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right)\right) + C$$

Logo,

$$\int x^2\cdot\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}x^2\cdot\sin(5x) + \frac{2}{25}x\cdot\cos(5x) - \frac{2}{125}\sin(5x) + C$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}\,dx$$

Vamos calcular essa integral definida:
$$\int_a^0 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_a^0 = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 0} - e^{2a}\right) = \frac{1}{2}(1-e^{2a})$$

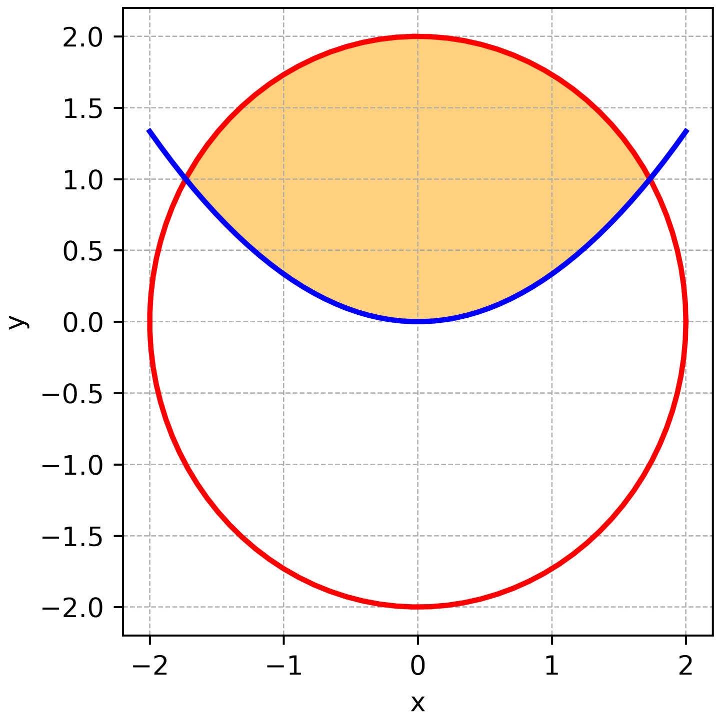
Com isso,
$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}(1-e^{2a}) = \frac{1}{2}.$$

(d) Vamos usar a substituição trigonométrica $x = 2\sin(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $dx = 2\cos(\theta)$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\text{sen}^2(\theta)}\,2\cos(\theta)\,dx = 4\int \sqrt{\cos^2(\theta)}\,\cos(\theta)\,d\theta \\
&= 4\int \cos^2(\theta)\,d\theta = 2\int 1+\cos(2\theta)\,d\theta = 2\theta + \sin(2\theta) + C \\
&= 2\theta + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + C = 2\,\text{asin}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

2. [3 pts] Determine a área entre o círculo $x^2 + y^2 = 4$ e a parábola $y = \dfrac{x^2}{3}$.

Solução: No gráfico abaixo vemos a região que pretendemos calcular a área. Note que a região é simétrica em relação ao eixo y, portanto basta calcular a área da região no primeiro quadrante.



Primeiramente vamos calcular as interseções. Substituindo $x^2 = 3y$ na equação do círculo, temos

$$3y + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-3 \pm 5}{2} \Longrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -4.$$

Portanto a interseção ocorre em $y = 1$, como sugere o gráfico. Substituindo na equação da parábola temos que $x = \pm\sqrt{3}$. Com isso, como a região é limitada por cima pela curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ e por baixo pela parábola, temos que a área da região é dada por:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{3}\, dx.$$

Usando a integral indefinida da Questão 1 item (d) temos que:

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \left(2\,\mathrm{asin}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A segunda integral é dada por:

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{9}\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo,

$$A = 2(I_1 - I_2) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$