UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS
Professor Reginaldo Demarque

1ª Prova de Cálculo II
05/06/2023 – 2023-1
Turma C1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 5 pts

Resolva as integrais:

(a) (1 pt) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

(b) (2 pts) $\displaystyle\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

(c) (1 pt) $\displaystyle\int \sin^2(x)\,dx$

(d) (1 pt) $\displaystyle\int \frac{2}{x(2x-1)}\,dx$

Solução:

(a) Vamos usar a substituição $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$.

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C.$$

(b) Vamos usar a técnica de substituição trigonométrica. Vamos fazer a substituição $x = 2\sin(\theta)$. Então, $dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$ e $4 - x^2 = 4 - 4\sin^2(\theta) = 4\cos^2(\theta)$.

Substituindo na integral, temos:

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{(4\cos^2(\theta))^{3/2}}\cdot 2\cos(\theta)\,d\theta = \int \frac{2\cos(\theta)}{2^3\cos^3(\theta)}\,d\theta = \int \frac{1}{4\cos^2(\theta)}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int \sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\tan(\theta) + C = \frac{x}{4(\sqrt{4-x^2})} + C$$

(c)

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C$$

(d) Primeiramente vamos decompor o integrando usando o método das frações parciais.

$$\frac{2}{x(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} \Rightarrow 2 = A(2x-1) + Bx.$$

Substituindo $x = 0$ e $x = 1/2$, podemos ver que $A = -2$ e $B = 4$. Com isso, temos que

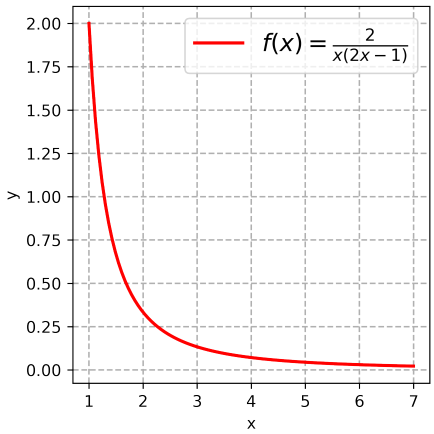
$$\int \frac{2}{x(2x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{2x-1}\right)\,dx = -2\log(x) + 2\log(2x-1) + C$$

Questão 2. .... ______/ 2 pts

Considere a função $f(x) = \dfrac{2}{x\,(2x-1)}$, para $x \geq 1$, dada no gráfico abaixo.

(a) Calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(2x-1)}\,dx$.

(b) Com base no gráfico da função, descreva a interpretação peculiar que o resultado do item (a) nos fornece.

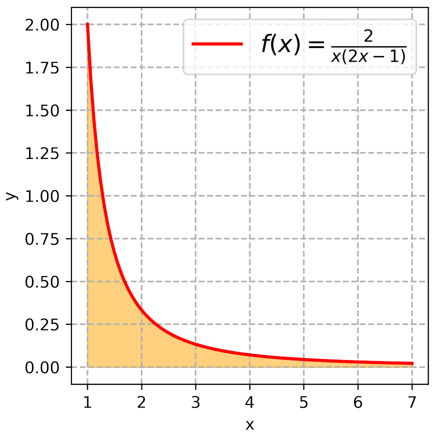


Solução:

(a) Usando a integral indefinida da Questão 1 item (d), temos que

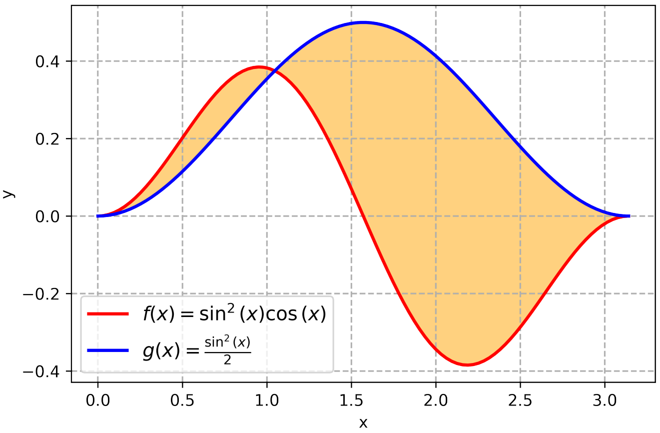
$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(2x-1)}\,dx &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{2x-1}\right) dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{2x-1}\right) dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-2\log(x) + 2\log(2x-1)\right)\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(2\log\left(\frac{2x-1}{x}\right)\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(2\log\left(\frac{2t-1}{t}\right)\right) \\
&= 2\log\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t-1}{t}\right)\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} 2\log(2).
\end{aligned}$$

(b) A integral representa a área limitada pelo gráfico da função e o eixo x, qndo $x \geq 1$. Pelo gráfico vemos que essa é uma região ilimitada, entretanto, pelo item (a), surpreendentemente tem área finita!



Questão 3. .... ______/ 2 pts

Determine a área da região sombreada limitada pelo gráfico das funções $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$ e $g(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{2}$.



Solução: Primeiramente, vamos determinar os pontos de interseção.

$$\sin^2(x)\cos(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} \Rightarrow \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)\sin^2(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Pelo intervalo dado no gráfico, podemos concluir que estes pontos são

$$x = 0,\ x = \frac{\pi}{3} \text{ e } x = \pi.$$

Com isso a área é dada por:

$$A = \int_0^{\pi/3} \sin^2(x)\cos(x) - \frac{\sin^2(x)}{2}\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{2} - \sin^2(x)\cos(x)\,dx.$$

Usando as integrais indefinidas obtidas na Questão 1, temos que:

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \left.\frac{\sin^3(x)}{3}\right|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2(x)}{2}\,dx = \left.\frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{8}\right|_0^{\pi/3} = -\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12}$$

$$I_3 = \int_{\pi/3}^{\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \left.\frac{\sin^3(x)}{3}\right|_{\pi/3}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$I_4 = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{2}\,dx = \left.\frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{8}\right|_{\pi/3}^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{6}$$

Logo,

$$A = I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = \frac{\pi}{12} + \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$