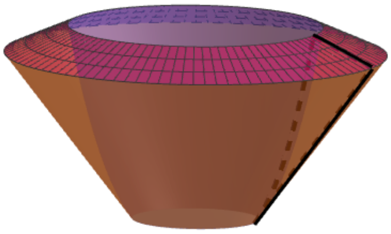
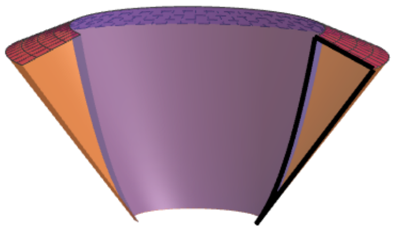
Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO
Professor Reginaldo Demarque

Atividade Preliminar de Revisão para a 1ª Prova de Cálculo II
29/05/2023 – 2023-1
Turma E1

Gabarito

---

1. Considere o sólido da figura abaixo gerado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 3x - 2$ e $y = -x + 10$.

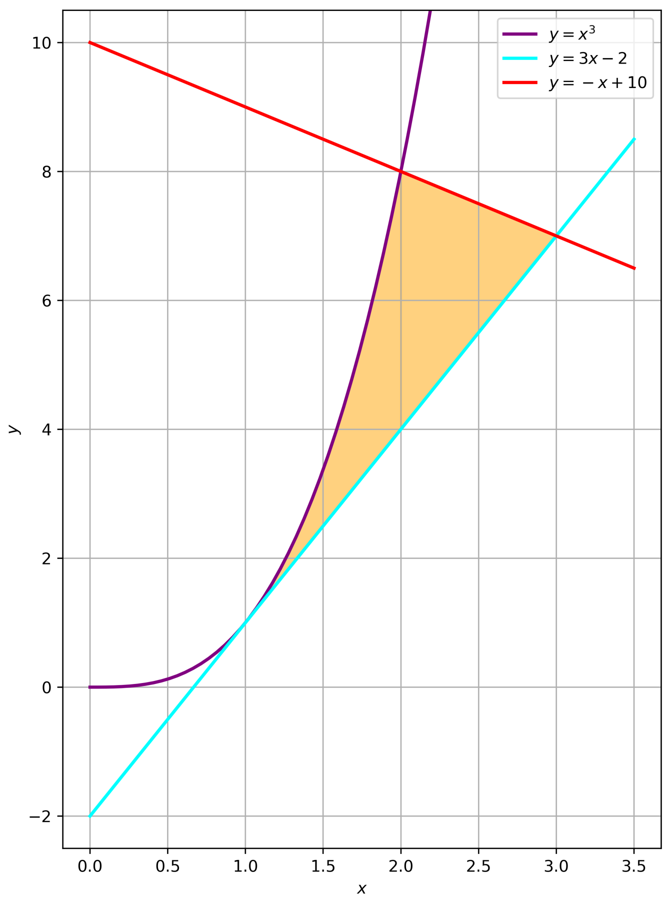



(a) Escreva o volume do sólido usando o método das cascas cilíndricas.

(b) Escreva o volume do sólido usando o método do fatiamento.

(c) Calcule o valor do volume do sólido usando um dos dois métodos anteriores.

Solução: Na figura abaixo vemos os gráficos das três curvas e a região limitada por elas. Vamos determinar as interseções dos gráficos.



1. Interseção entre $y = x^3$ e $y = 3x - 2$.

   Note que o gráfico sugere uma interseção no ponto $x = 1$. Substituindo $x = 1$ verificamos facilmente que $y = 1$ em ambas, o que confirma a interseção neste ponto.

2. Interseção entre $y = x^3$ e $y = -x+10$.

   Como antes, substituindo $x = 2$ nas equações, verificamos que $y = 8$ em ambas.

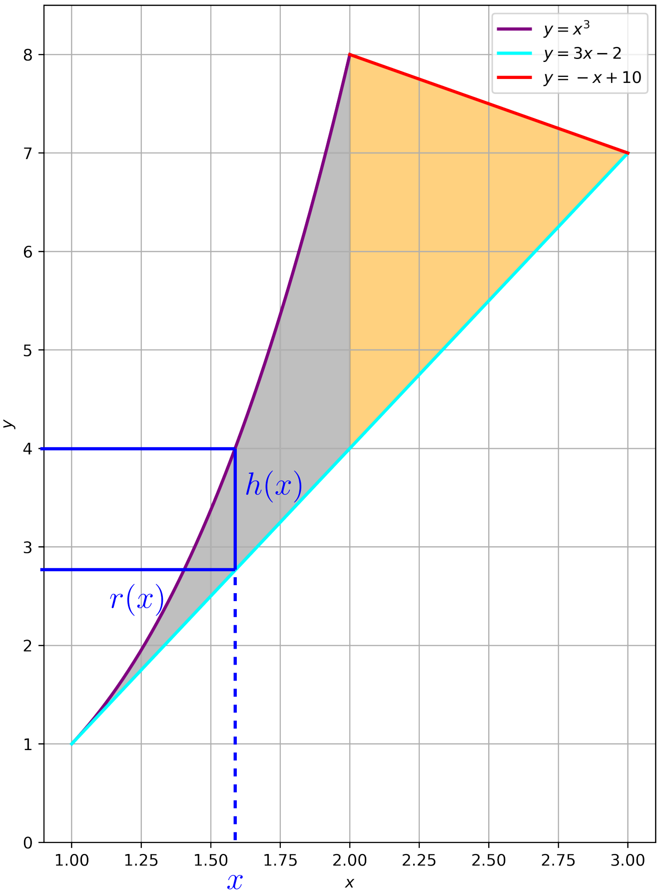
3. Interseção entre $y = 3x - 2$ e $y = -x + 10$.

   Também verifica-se facilmente que para $x = 3$, $y = 7$ em ambas.

(a) Com isso, sabemos que volume pelo método das cascas cilíndricas é dado por

$$V = 2\pi \int_1^3 r(x)h(x)\,dx,$$

onde $r(x)$ é o raio e $h(x)$ é a altura de cada casca cilíndrica para cada valor de $x \in [1,3]$.



No gráfico ao lado, dividimos a região a ser rotacionada em duas partes, a cinza quando $x \in [1,2]$ e a laranja quando $x \in [2,3]$. Na parte cinza, desenhamos o retângulo que será rotacionado para formar a casca cilíndrica. Podemos ver que o raio do cilindro será $r(x) = x$ e que a altura será $h(x) = x^3 - (3x-2)$. Analogamente, na parte laranja, isto é, para $x \in [2,3]$, ainda temos $r(x) = x$, entretanto, $h(x) = (-x+10) - (3x-2)$. Com isso,

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & x \in [1,2] \\ 12 - 4x, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

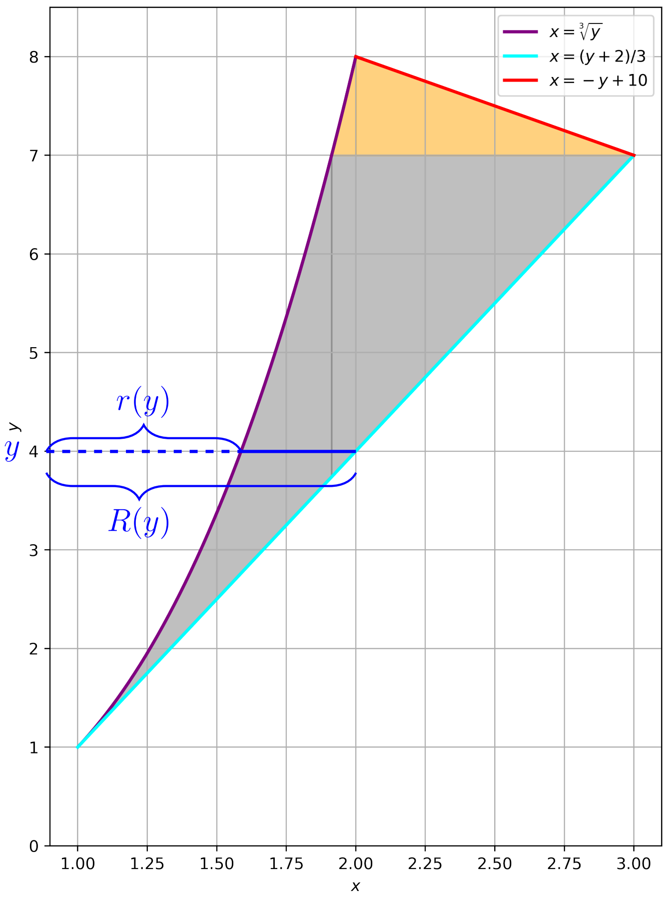
Portanto, o volume é dado por:

$$V = 2\pi \int_1^2 x(x^3 - 3x + 2)\,dx + 2\pi \int_2^3 x(12 - 4x)\,dx \tag{1}$$

(b) Para o método do fatiamento (ou dos discos) a variável da integral deve ser a mesma do eixo de rotação, no caso y. Sabemos que o volume é dado por:

$$V = \int_1^8 A(y)\,dy,$$

onde $A(y)$ é a área da seção transversal S_y do sólido ao interceptá-lo por um plano perpendicular ao eixo y.



Como o sólido é de revolução, S_y será um anel com raios $R(y)$ e $r(y)$. Daí, $A(y) = \pi(R^2(y) - r^2(y))$. Para determinar os raios, a cada y fixado entre 1 e 8, desenhamos um segmento horizontal, que ao ser girado, vai formar o anel de área $A(y)$. Novamente, vamos dividir a região em duas partes, quando $y \in [1,7]$ e quando $y \in [7,8]$. Na figura ao lado desenhamos um segmento na parte cinza. Podemos ver que $r(y) = \sqrt[3]{y}$, enquanto $R(y) = -y+10$. Analogamente, na parte laranja, isto é, para $y \in [7,8]$, ainda temos $r(y) = \sqrt[3]{y}$, entretanto, $R(y) = (y+2)/3$. Com isso,

$$R(y) = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{2}{3}, & y \in [1,7], \\ 10 - y, & y \in [7,8] \end{cases}$$

e

$$r(y) = \sqrt[3]{y}, \ y \in [1,8].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V = \pi \int_1^8 R^2(y) - r^2(y)\, dy &= \pi \int_1^7 \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 - y^{\frac{2}{3}}\, dy + \pi \int_7^8 (10-y)^2 - y^{\frac{2}{3}}\, dy \\ &= \pi \int_1^7 \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 dy + \pi \int_7^8 (10-y)^2\, dy - \pi \int_1^8 y^{\frac{2}{3}}\, dy \end{aligned} \tag{2}$$

(c) Usando o item (a) para calcular o volume

Vamos calcular cada integral separadamente.

$$\int_1^2 x(x^3 - 3x + 2)\, dx = \int_1^2 x^4 - 3x^2 + 2x\, dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_{x=1}^2 = \frac{11}{5}.$$

$$\int_2^3 x(12 - 4x)\, dx = \int_2^3 -4x^2 + 12x\, dx = \left(-\frac{4x^3}{3} + 6x^2\right)\Bigg|_{x=2}^3 = \frac{14}{3}.$$

Portanto, substituindo em (1), obtemos

$$V = 2\pi\left(\frac{11}{5} + \frac{14}{3}\right) = \frac{206\pi}{15} \approx 43.1445391092998.$$

Usando o item (b) para calcular o volume

Vamos calcular cada integral separadamente.

$$\int_1^7 \left(\frac{y}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 dy = \left(\frac{y^3}{27}+\frac{2y^2}{9}+\frac{4y}{9}\right)\Bigg|_{y=1}^{7} = 26.$$

$$\int_8^7 (10-y)^2\,dy = \left(\frac{y^3}{3}-10y^2+100y\right)\Bigg|_{y=7}^{8} = \frac{19}{3}.$$

$$\int_1^8 y^{\frac{2}{3}}\,dy = \left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}\right)\Bigg|_{y=1}^{8} = \frac{93}{5}.$$

Finalmente, substituindo em (2), obtemos

$$V = \pi\left(26+\frac{19}{3}-\frac{93}{5}\right) = \frac{206\pi}{15} \approx 43.1445391092998.$$