



**Gabarito da 1ª Prova de Cálculo 2 – 1/2019**  
**03/05/2019**

1. Calcule as integrais abaixo

(a) [1 pt]  $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 2)^2} dx$

(b) [2 pts]  $\int \ln^2 x dx$

(c) [1 pt]  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

(d) [2 pts]  $\int \frac{1}{\sqrt{-2x - x^2}} dx$

**Solução:**

(a) Fazendo a substituição  $u = x^2 - 2$ ,  $du = 2x dx$  temos

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{(x - 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{2u} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{4}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x dx &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx && \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & du = 2 \ln x / x dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right. \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx && \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = 1/x dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right. \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x dx && \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x \quad du = \sec^2 x dx \end{array} \right. \\ &= \int \sec^2 x \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \int u du + \ln |\cos x| \\ &= \frac{u^2}{2} + \ln |\cos x| + C \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

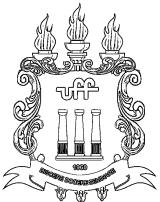
(d) Completando quadrado vemos que  $-2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$ , com isso

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-2x - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}} dx && \left| \begin{array}{l} x + 1 = \operatorname{sen} \theta \quad dx = \cos \theta d\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \\ &= \int \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}} d\theta \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C = \operatorname{arcsen}(x + 1) + C \end{aligned}$$

2. Suponha que  $f$  é contínua em todo  $x \in \mathbb{R}$  e que  $f(0) = -1$ . Se

$$g(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt,$$

mostre que



- (a) [1 pt] O gráfico de  $g$  tem uma tangente horizontal em  $x = 0$ .  
(b) [1 pt] O gráfico de  $g$  tem um máximo local em  $x = 0$ .

**Solução:**

- (a) Pela regra de Leibniz temos que

$$g'(x) = 2xf(x^2) \Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 0 f(0) = 0.$$

Com isso temos que 0 é ponto crítico de  $g$  e portanto o gráfico de  $g$  tem uma tangente horizontal em  $x = 0$ .

- (b) Derivando novamente a função  $g$  temos que

$$g''(x) = 2f(x^2) + 4x^2 f'(x^2) \Rightarrow g''(0) = 2f(0) = -2 < 0,$$

logo 0 é ponto de máximo local.

3. Considere as seguintes fórmulas de recorrência:

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sen x - n \int x^{n-1} \sen x \, dx,$$

$$\int x^n \sen x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx.$$

- (a) [1 pt] Use estas fórmulas para calcular

$$\int x^5 \cos x \, dx.$$

- (b) [1 pt] Use integração por partes e demonstre uma das fórmulas.

**Solução:**

- (a)

$$\begin{aligned} \int x^5 \cos x \, dx &= x^5 \sen x - 5 \int x^4 \sen x \, dx \\ &= x^5 \sen x + 5x^4 \cos x - 20 \int x^3 \cos x \, dx \\ &= x^5 \sen x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sen x + 60 \int x^2 \sen x \, dx \\ &= x^5 \sen x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sen x - 60x^2 \cos x + 120 \int x \cos x \, dx \\ &= x^5 \sen x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sen x - 60x^2 \cos x + 120x \sen x - 120 \int \sen x \, dx \\ &= x^5 \sen x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sen x - 60x^2 \cos x + 120x \sen x + 120 \cos x + C \end{aligned}$$

- (b) Vamos mostrar a primeira das fórmulas. Fazendo  $u = x^n$  e  $dv = \cos x \, dx$  temos que  $du = nx^{n-1}dx$  e  $v = \sen x$ . Usando a integração por partes temos que

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sen x - n \int x^{n-1} \sen x \, dx.$$