Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras

Gabarito da 1ª Prova de Cálculo 2 – 1/2019
03/05/2019

1. Calcule as integrais abaixo

(a) [1 pt] $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2}dx$

(b) [2 pts] $\displaystyle\int \ln^2 x dx$

(c) [1 pt] $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\ dx$

(d) [2 pts] $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}}dx$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = x^2 - 2$, $du = 2x\ dx$ temos

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x-2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{u^2}du = -\left.\frac{1}{2u}\right|_{-2}^{-1} = \frac{1}{4}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x\ dx &= x\ln^2 x - 2\int \ln x\ dx && u=\ln^2 x \quad du = 2\ln x/x\ dx,\quad dv = dx \quad v = x\\ &= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int\ dx && u = \ln x \quad du = 1/x dx,\quad dv = dx \quad v = x\\ &= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\ dx &= \int (\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x\ dx\\ &= \int \sec^2 x \operatorname{tg} x\ dx - \int \operatorname{tg} x\ dx && u = \operatorname{tg} x \quad du = \sec^2 x\ dx\\ &= \int u\ du + \ln|\cos x|\\ &= \tfrac{u^2}{2} + \ln|\cos x| + C\\ &= \tfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

(d) Completando quadrado vemos que $-2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, com isso

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{-2x-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx && x+1 = \operatorname{sen}\theta \quad dx = \cos\theta\ d\theta, -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}.\\ &= \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta\\ &= \int d\theta\\ &= \theta + C = \operatorname{arcsen}(x+1) + C\end{aligned}$$

2. Suponha que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f(0) = -1$. Se

$$g(x) = \int_1^{x^2} f(t)\ dt,$$

mostre que

(a) [1 pt] O gráfico de g tem uma tangente horizontal em $x = 0$.

(b) [1 pt] O gráfico de g tem um máximo local em $x = 0$.

Solução:

(a) Pela regra de Leibniz temos que

$$g'(x) = 2xf(x^2) \Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 0f(0) = 0.$$

Com isso temos que 0 é ponto crítico de g e portanto o gráfico de g tem uma tangente horizontal em $x = 0$.

(b) Derivando novamente a função g temos que

$$g''(x) = 2f(x^2) + 4x^2 f'(x^2) \Rightarrow g''(0) = 2f(0) = -2 < 0,$$

logo 0 é ponto de máximo local.

3. Considere as seguintes fórmulas de recorrência:

$$\int x^n \cos x \; dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x \; dx,$$

$$\int x^n \operatorname{sen} x \; dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \; dx.$$

(a) [1 pt] Use estas fórmulas para calcular

$$\int x^5 \cos x \; dx.$$

(b) [1 pt] Use integração por partes e demostre uma das fórmulas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\int x^5 \cos x \; dx &= x^5 \operatorname{sen} x - 5 \int x^4 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20 \int x^3 \cos x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x + 60 \int x^2 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120 \int x \cos x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x - 120 \int \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C
\end{aligned}$$

(b) Vamos mostra a primeira das fórmulas. Fazendo $u = x^n$ e $dv = \cos x \; dx$ temos que $du = nx^{n-1}dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Usando a integração por partes temos que

$$\int x^n \cos x \; dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x \; dx.$$