UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – RIC
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA – RFM
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – PURO

Verificação Suplementar de Cálculo 2 – Turma C1 – 1/2013
12/08/2013

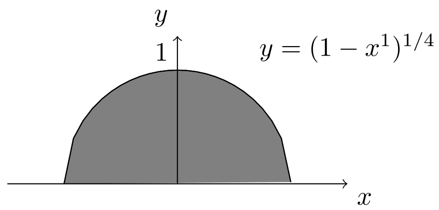
Questão:	1	2	3	Total
Pontos:	3	3	4	10
Notas:				

Nome:____

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. [3 pontos] Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pela curva $y = (1 - x^2)^{1/4}$ e o eixo x.

Solução: A região é dada pela figura abaixo.



Neste caso sabemos que o volume é dado por

$$V = \int_{-1}^{1} \pi\sqrt{1 - x^2}\, dx \overset{*}{=} \frac{\pi^2}{2}.$$

$*$ Fazendo a substituição trigonométrica $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ temos que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta \\
&= \int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}\right).
\end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\int_{-1}^{1} \pi\sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2})\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{2}$$

2. [3 pontos] Encontre a solução geral da EDO.

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = \frac{x+1}{4} + e^{x/2}.$$

Solução:

Resolvendo a EDO Homogênea: $y'' - y' + \frac{y}{4} = 0$

Vamos encontrar as raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Logo as solução geral da EDO homogênea é:

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

Solução Particular usando MCD para a EDO: $y'' - y' + \frac{y}{4} = \frac{x+1}{4}$.

Supondo que a solução particular é da forma

$$y_{p_1}(x) = A + Bx$$

e substituindo na EDO obtemos que

$$\frac{1}{4}(A - 4B + Bx) = \frac{x+1}{4} \Rightarrow A = 5 \text{ e } B = 1.$$

Assim,

$$\boxed{y_{p_1}(x) = x + 5,\ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Solução Particular usando MCD para a EDO: $y'' - y' + \frac{y}{4} = e^{x/2}$.

Supondo que a solução particular é da forma

$$y_{p_2}(x) = Ax^2 e^{(}x/2)$$

e substituindo na EDO obtemos que

$$2Ae^{x/2} = e^{x/2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\boxed{y_{p_2}(x) = \tfrac{x^2}{2} e^{x/2},\ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Logo a solução geral da EDO é

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2} + x + 5 + \tfrac{x^2}{2} e^{x/2},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

3. [4 pontos] Encontre a solução geral da EDO

$$x(1-x)y'' + xy' - y = -x^3(x-1)$$

Solução: Primeiramente devemos encontrar a solução geral da EDO homogênea. É fácil ver que $y_1(x) = x$ é uma solução da EDO homogênea, vamos usar o método da redução de ordem para encontrar uma segunda solução LI.

Suponha que a segunda solução é da forma

$$y_2(x) = u(x)x.$$

Substituindo na EDO e simplificando obtemos que

$$x(x-1)u'' + (x-2)u' = 0.$$

Fazendo a substituição $v = u'$ e $v' = u''$ temos que

$$x(x-1)v' + (x-2)v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{x-2}{x(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \ln|v| = \ln\left|\frac{x-1}{x^2}\right| + c.$$

Daí, podemos tomar

$$v = \frac{x-1}{x^2}.$$

Integrando v obtemos que

$$u = \int \frac{x-1}{x^2}\, dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + c.$$

Assim, tomando $c = 0$, temos que

$$\boxed{y_2(x) = x\ln|x| + 1.}$$

Note que

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} x & x\ln|x| + 1 \\ 1 & \ln|x| + 1 \end{pmatrix} = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto y_1 e y_2 são LI em qualquer intervalo I que não contenha $x = 1$.

Reescrevendo a EDO homogênea na forma

$$y'' + \frac{1}{1-x}y' - \frac{1}{x(1-x)}y = 0,$$

temos, pelo T.E.U.S, que a EDO tem solução única em qualquer intervalo I que não contém $x = 1$ e $x = 0$, logo a solução geral da EDO homogênea em qualquer desses intervalos é

$$\boxed{y_h(x) = c_1 x + c_2(x\ln|x| + 1)}$$

Agora vamos determinar uma solução particular da EDO não homogênea usando o método da variação dos parâmetros. Neste caso devemos reescrever a EDO da seguinte forma

$$y'' + \frac{1}{1-x}y' - \frac{1}{x(1-x)}y = x^2.$$

Com isso seja

$$y_p(x) = u(x)x + v(x)(x\ln|x| + 1),$$

onde u e v são funções que satisfazem

$$\begin{cases} xu' + & (x\ln|x| + 1)v' & = 0 \\ u' + & (\ln|x| + 1)v' & = x^2(x-1) \end{cases}$$

Resolvendo os sistema obtemos que

$$u' = -x^2 - x^3\ln|x| \quad \text{e} \quad v' = x^3.$$

Com isso temos que

$$v = \frac{x^4}{4}$$

e

$$u = -\frac{x^3}{3} - \int x^3 \ln|x|\, dx \overset{(*)}{=} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^4}{4}\ln|x|.$$

$(*)$ Usando integração por partes temos que

$$\int x^3 \ln|x|\, dx = \frac{x^4}{4}\ln|x| - \int \frac{x^3}{4}\, dx = \frac{x^4}{4}\ln|x| - \frac{x^4}{16} + c.$$

Daí,

$$\boxed{y_p(x) = -\tfrac{x^4}{12} + \tfrac{x^5}{16}.}$$

Logo a solução geral da EDO não homogênea é

$$\boxed{y(x) = c_1 x + c_2(x\ln|x| + 1)| - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{16}.}$$

"O drama da burguesia é saber que não pode viver sem o proletariado e de que este pode viver (melhor) sem ela".

Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras – PURO

Regras de Derivação

$\frac{d}{dx}c = 0$

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$

$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (regra da cadeia)

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (regra do produto)

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (regra do quociente)

Tabela de Derivadas

$\frac{d}{dx}x = 1$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cossech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$

$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Substituição Tangente do Ângulo Médio

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$