Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras – PURO

3ª prova de Cálculo 2 – parte 2 – Turma C1 – 1/2013
05/08/2013

Questão:	1	2	3	Total
Pontos:	1,5	1,5	1	4
Notas:				

Nome:____

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. [1,5 pontos] Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

Solução:

Resolvendo a EDO Homogênea: $y'' + 2y' + y = 0$

Vamos encontrar as raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Logo as solução geral da EDO homogênea é:

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

Encontrando uma Solução Particular (MCD):

Supondo que a solução particular é da forma

$$y_p(x) = Ax^2 e^{-x}$$

e substituindo na EDO obtemos que

$$2Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução geral da EDO é

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} x + c_2 x e^{-x} + \tfrac{1}{2} x^2 e^{-x},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

2. [1,5 pontos] Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

Solução:

Resolvendo a EDO Homogênea: $y'' + y = 0$

Vamos encontrar as raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Logo as solução geral da EDO homogênea é:

$$\boxed{y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

Encontrando uma Solução Particular (MVP):

Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(x) = u(x)\cos x + v(x) \operatorname{sen} x,$$

onde u e v satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \operatorname{sen} x &= 0 \\ -u' \operatorname{sen} x + v' \cos x &= \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que

$$u' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \text{ e } v' = \operatorname{sen} x.$$

Integrando temos que

$$u = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) \text{ e } v = -\cos x.$$

Assim,

$$y_p(x) = (\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x))\cos x - \cos x \operatorname{sen} x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução geral da EDO é

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x))\cos x - \cos x \operatorname{sen} x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$$

3. [1 ponto] Encontre a solução geral da EDO.

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0,$$

sabendo-se que $y_1(x) = e^{-x}$ é uma solução.

Solução:

Vamos aplicar o método de redução de ordem. Suponha que a segunda solução seja da forma

$$y_2(x) = u(x)e^{-x}.$$

Substituindo na EDO obtemos que

$$(x+3)u'' - (x+4)u' = 0.$$

Fazendo a substituição $v = u'$ e $v' = u''$ temos que

$$(x+3)v' - (x+4)v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3} \Rightarrow \ln|v| = x + \ln|x+3| + c.$$

Daí,

$$v = (x+3)e^x.$$

Integrando v obtemos que

$$u = (x+2)e^x.$$

Assim,

$$\boxed{y_2(x) = x+2.}$$

Note que

$$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{-x} & x+2 \\ -e^{-x} & 1 \end{pmatrix} = (x+3)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Portanto y_1 e y_2 são LI em qualquer intervalo I que não contenha $x=3$.

Reescrevendo a EDO na forma

$$y'' + \frac{x+2}{x+3}y' - \frac{1}{x+3}y = 0,$$

temos, pelo T.E.U.S, que a EDO tem solução única em qualquer intervalo I que não contém $x=3$, logo a solução geral da EDO em qualquer desses intervalos é

$$\boxed{y(x) = c_1e^{-x} + c_2(x+2)}$$

"Se você pegar no mais ardente dos revolucionários, e der poder absoluto a ele, dentro de um ano ele será pior do que o próprio czar".

Mikhail Bakunin

Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras – PURO

Regras de Derivação

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \text{ (regra da cadeia)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ (regra do produto)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ (regra do quociente)}$$

Tabela de Derivadas

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cossech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1+\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(a+b))$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$$

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Substituição Tangente do Ângulo Médio

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$