Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

3ª prova de Cálculo 2 – parte 1 – Turma C1 – 1/2013
19/07/2013

Questão:	1	2	3	Total
Pontos:	1	1	2	4
Notas:				

Nome:____

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. [1 ponto] Encontre a solução geral da EDO $y' = y(xy^2 - 1)$

Solução:
Note que
$$y' = y(xy^2 - 1) \Rightarrow y' + y = xy^3,$$
portanto esta é uma equação de Bernoulli. Assim, dividindo a equação por y^3 temos
$$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x.$$
Fazendo $v = y^{-2}$ temos que $v' = -2y^{-3}y'$. Substituindo na última EDO obtemos a seguinte EDO linear
$$v' - 2v = -2x,$$
cujo fator integrante é $\mu = e^{\int -2\ dx} = e^{-2x}$. Com isso temos que
$$\begin{aligned}
v' - 2v = -2x &\Rightarrow e^{-2x}v' - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x} \\
&\Rightarrow (e^{-2x}v)' = -2xe^{-2x} \\
&\Rightarrow e^{-2x}v = \int -2xe^{-2x}\ dx + c \\
&\Rightarrow e^{-2x}v = xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2} + c \\
&\Rightarrow v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x} \\
&\Rightarrow y^2 = \frac{2}{2x + 1 + ce^{2x}}
\end{aligned}$$
Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente por
$$y^2 = \frac{2}{2x + 1 + ce^{2x}}$$

2. [1 ponto] Encontre o valor de b para o qual a EDO abaixo é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

$$(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0.$$

Solução: Sejam $M(x, y) = xy^2 + bx^2y$ e $N(x, y) = (x + y)x^2$. Note M e N são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$, portanto, para que a EDO seja exata devemos ter que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = bx^2 + 2xy$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$ é claro que $b = 3$.

Como já sabemos que a EDO $(xy^2 + 3x^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$ é exata, devemos encontrar $\psi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Neste caso, note que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = xy^2 + bx^2y \Rightarrow \psi = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y).$$

Derivando ψ em relação a y e igualando a N obtemos que

$$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + yx^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c.$$

Com isso, podemos tomar $\psi(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2}$. Logo a solução da EDO é dada implicitamente por

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c$$

3. [2 pontos] Resolva o seguinte PVI e determine o intervalo de validade da solução

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y - x}{y - x - 1} \\ \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Solução: Vamos primeiramente encontrar a solução geral da EDO. Fazendo a substituição $v = y - x$ e $v' = y' - 1$ e reorganizando a equação obtemos a seguinte EDO separável

$$(v - 1)v' = 1.$$

Integrando em relação a x e voltando para a variável anterior obtemos que

$$\frac{v^2}{2} - v = x + c \Rightarrow (y - x)^2 - 2y = c.$$

Portanto a solução geral é dada por

$$(y - x)^2 - 2y = c.$$

Substituindo as condições iniciais temos que $c = 1$, portanto a solução do PVI é dada por

$$(y - x)^2 - 2y = 1.$$

Agora vamos encontrar o intervalo de validade da solução. Note que a única restrição está sobre a derivada, ou seja, para que a derivada exista devemos ter $y - x - 1 \neq 0$. Assim, vejamos quando $y - x - 1 = 0$. Substituindo $y = x + 1$ na solução do PVI obtemos que $x = -1$. Portanto podemos concluir que o maior intervalo contendo o ponto $x = 1$ onde a solução é válida é $(-1, +\infty)$. Logo a solução do PVI é

$$(y - x)^2 - 2y = 1, \quad \forall x \in (-1, +\infty).$$

Invictus

Out of the night that covers me,
Black as the pit from pole to pole,
I thank whatever gods may be
For my unconquerable soul.

In the fell clutch of circumstance
I have not winced nor cried aloud.
Under the bludgeonings of chance
My head is bloody, but unbowed.

Beyond this place of wrath and tears
Looms but the Horror of the shade,
And yet the menace of the years
Finds and shall find me unafraid.

It matters not how strait the gate,
How charged with punishment the scroll,
I am the master of my fate:
I am the captain of my soul.

Invictus

Dentro da noite que me rodeia
Negra como um poço de lado a lado
Agradeço aos deuses que existem
Por minha alma indomável

Sob as garras cruéis das circunstâncias
eu não tremo e nem me desespero
Sob os duros golpes do acaso
Minha cabeça sangra, mas continua erguida

Mais além deste lugar de lágrimas e ira,
Jazem os horrores da sombra.
Mas a ameaça dos anos,
Me encontra e me encontrará, sem medo.

Não importa quão estreito o portão
Quão repletade castigo a sentença,
Eu sou o senhor de meu destino
Eu sou o capitão de minha alma.

Poema escrito por William Ernest Henley em 1875 que deu esperança ao o líder sul-africano, símbolo da luta contra o Apartheid, Nelson Mandela no período em que esteve aprisionado em Robben Island, onde cumpria pena de trabalhos forçados. Em 2009 Clint Eastwood dirigiu o filme “Invictus”, estrelado por Morgan Freeman e Matt Damon, que conta a história de como o presidente sul africano Nelson Mandela usa o esporte para unir a população, durante uma copa do mundo no País.

Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Regras de Derivação

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \text{ (regra da cadeia)}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{ (regra do produto)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ (regra do quociente)}$$

Tabela de Derivadas

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cossech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Substituição Tangente do Ângulo Médio

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$