Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Gabarito da 1ª prova de Cálculo 2– Turma C1 – 1/2013
27/05/2013

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	5	2	2	1	10
Notas:					

Nome:____ Matr.:________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Calcule as integrais

   (a) [1 ponto] $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2}dx$

   (b) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+10}dx$

   (c) [2 pontos] $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^4-16}dx$

   (d) [1 ponto] $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = x^2 - 2$, $du = 2x\,dx$ temos

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x-2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{u^2}du = -\left.\frac{1}{2u}\right|_{-2}^{-1} = \frac{1}{4}$$

(b) Completando quadrado vemos que $4x^2+4x+10 = (2x+1)^2+9$, com isso

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4x^2+4x+10}dx &= \int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{\sec^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{6}\int d\theta = \frac{\theta}{6}+C \\
&= \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+C
\end{aligned}$$

$\frac{2x+1}{3} = \operatorname{tg}\theta \quad dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$

(c) Da divisão euclidiana temos que $x^5 = x(x^4-16)+16x$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{x^4-16}dx &= \int \frac{x(x^4-16)+16x}{x^4-16}dx \\
&= \int x + \frac{16x}{x^4-16}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \int \frac{16x}{(x-2)(x+2)(x^2-4)}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{4+x^2}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \ln|x+2| - \ln(x^2+4) + C \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right| + C
\end{aligned}$$

Frações Parciais

(d) Usando a fórmula de recorrência da questão 3 temos que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx = \int \sec^3 x - \sec x dx \\
&= \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\int \sec x \, dx - \int \sec x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C
\end{aligned}$$

2. [2 pontos] Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt}{\sqrt{x}}$

Solução: Primeiramente note que como $\operatorname{sen}(t^2)$ é uma função contínua, então

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt = 0.$$

Neste caso o limite em questão é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, portanto podemos usar a regra de L'hopital. Assim, usando a regra de Leibniz temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(4x)\frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{sen}(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} (2\operatorname{sen}(4x) - \operatorname{sen}(x)) = 0$$

3. Considere a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \, dx$$

(a) [1 ponto] Use esta fórmula para calcular

$$\int \sec^4 x \, dx.$$

(b) [1 ponto] Use integração por partes para demonstrar a fórmula.

Solução:

(a)

$$\int \sec^4 x \; dx = \frac{1}{3}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\int \sec^2 x \; dx = \frac{1}{3}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + C.$$

(b)

Note que

$$\int \sec^n x \; dx \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \; dx.$$

Aplicando a seguinte integração por partes

$$\begin{array}{ll} u = \sec^{n-2} x & du = (n-2)\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x \; dx \\ dv = \sec^2 x \; dx & v = \operatorname{tg} x \end{array}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int \sec^n x \; dx \quad &= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \; dx \\ &=\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2)\int \sec^{n-2} \operatorname{tg}^2 x \; dx \\ &=\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2)\int \sec^{n-2}(\sec^2 x - 1) \; dx \\ &=\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x - (n-2)\int \sec^{n} \; dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (n-1)\int \sec^n x \; dx = \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + (n-2)\int \sec^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^n x \; dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx.$$

4. [1 ponto] Use a regra de Leibniz para determinar a função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(0) = 1$ e

$$f(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t) \; dt.$$

Solução: Derivando f temos que

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t) \; dt + \frac{1}{x-a}f(x) = -\frac{1}{x-a}f(x) + \frac{1}{x-a}f(x) = 0.$$

Logo temos que f é constante. Como $f(0) = 1$ temos que $f(x) = 1$, $\forall \; x \in [a,b]$