Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

2ª prova de Cálculo 2 – 2/2012
05/02/2013

Questão:	1	2	Total
Pontos:	2	4	6
Bonus:	0	0	0
Notas:			

Nome:______________________________________ Matr.:______________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. [2 pontos] Esboce a região limitada pelas curvas $y = -x^3 + 5x^2$ e $y = 4x$ e calcule sua área.

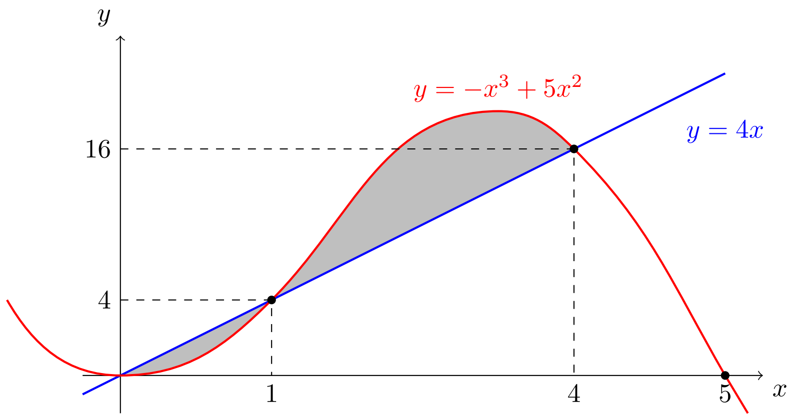
Solução:

Primeiramente vamos calcular as interseções das curvas. Note que

$$-x^3 + 5x^2 = 4x \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Substituindo estes valores em uma das equações obtemos que os pontos os gráficos se intersectam nos pontos $(0,0)$, $(1,4)$ e $(4,16)$.

Com isso temos o seguinte esboço da região entre as figuras.



Daí, temos que a área da região é

$$\int_0^1 4x + x^3 - 5x^2 \, dx + \int_1^4 -x^3 + 5x^2 - 4x \, dx = \frac{71}{6}$$

2. Considere o sólido **S** gerado pela rotação da região limitada pelo gráfico das funções $y = \frac{3}{x}$ e $x + y = 4$ em torno do eixo $x = 4$.

   (a) [2 pontos] Usando o método dos discos escreva a integral que expressa o volume do sólido **S** e faça um esboço para justificar a escolha dos raios dos discos.

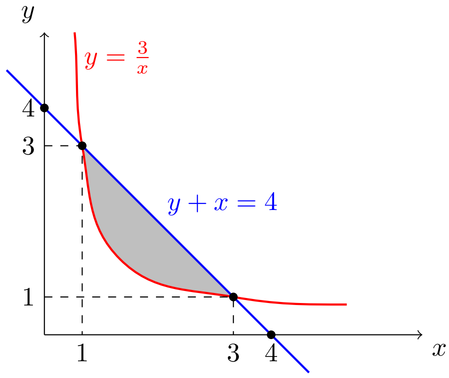
(b) [2 pontos] Usando o método das cascas cilíndricas escreva a integral que expressa o volume do sólido **S** e faça um esboço para justificar a escolha do raio e da altura das cascas cilíndricas.

Solução:

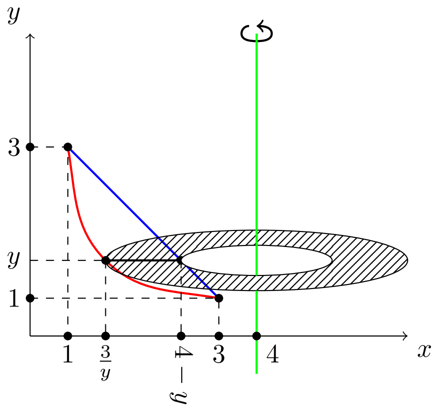
Vamos calcular as interseções das curvas. Substituindo $y = \frac{3}{x}$ na equação da reta temos que

$$x + \frac{3}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Com isso podemos ver que as curvas se intersectam nos pontos $(1, 3)$ e $(3, 1)$. Abaixo temos um esboço da região entre as curvas.



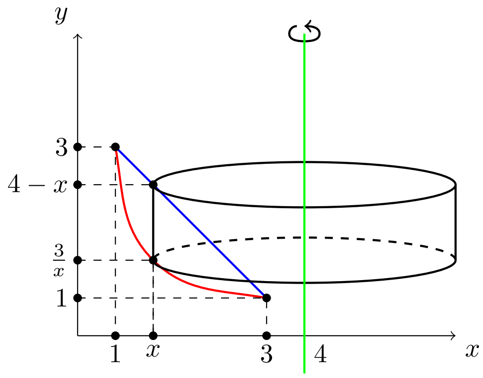
(a) A seguir temos um esboço da seção transversal do sólido perpendicular ao eixo y.



Como essa seção transversal é um disco centrado no eixo $x = 4$ podemos ver que, para cada $y \in [1, 3]$, a área desse disco é $A(y) = \pi\left((4 - \frac{3}{y})^2 - y^2\right)$. Portanto, o volume **V** do sólido S é dado por:

$$\mathbf{V} = \int_1^3 A(y)\, dy = \int_1^3 \pi \left(\left(4 - \frac{3}{y}\right)^2 - y^2\right) dy.$$

(b) Fixado $x \in [1, 3]$ construímos a casca cilíndrica correspondente com na figura abaixo.



Podemos ver que esta casca cilíndrica tem raio $r(x) = 4 - x$ e altura $h(x) = 4 - x - \frac{3}{x}$, portanto temos que o volume é dado por

$$\mathbf{V} = \int_1^3 2\pi r(x)h(x)dx = \int_1^3 2\pi(4-x)\left(4 - x - \frac{3}{x}\right) dx.$$

3. Decida sobre a convergência das integrais abaixo:

(a) [2 pontos] $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

(b) [2 pontos] $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\, dx$

Solução:

(a) Da definição de integral imprópria e usando a substituição $u = -x^2$ $du = -2x\ dx$ vemos que

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-b^2} e^u\, dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-b^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2e}.$$

Logo a integral converge.

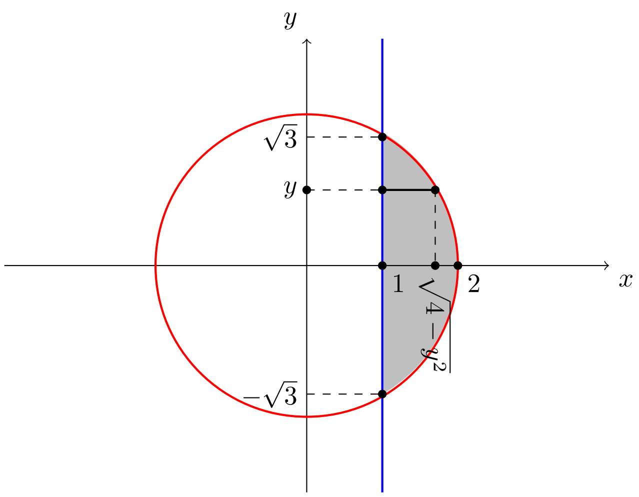
(b) Note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2 \ln x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Como $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, pelo teste da comparação no limite, temos que a integral em questão também converge.

4. [1 bonus] Em uma esfera de raio 2 cm é feito um furo atravessando o seu centro com uma broca de 10 mm de diâmetro. Determine o volume do material removido da esfera.

Solução: Primeiramente observamos que furo feito na esfera é de 1 cm. Depois note que a esfera furada pode ser obtida girando-se, em torno no deixo y, a região limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e a reta $x = 1$, como na figura abaixo.



Substituindo $x = 1$ na equação do círculo obtemos que os pontos $(1, -\sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$ são as interseções do círculo com a reta $x = 1$ como descrito na figura. Usando o método dos discos podemos ver que o volume do sólido é dado por

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi(4 - y^2 - 1)\ dy = 4\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3.$$