Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Verificação Suplementar - Turma E1 de Cálculo 2– 2/2012
28/03/2013

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	2	3	1	10
Notas:					

Nome:______________________________ Matr.:______________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Calcule as seguintes integrais

   (a) [1 ponto] $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

   (b) [1 ponto] $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

   (c) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

   (d) [1 ponto] $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= -\int_{\pi}^{\pi/2}\cos u\,du \\ &= -\operatorname{sen} u\,\Big|_{u=\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1\end{aligned}$$

$u = \frac{1}{x}\quad du = -\frac{1}{x^2}\,dx$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x\,dx \\ &= \int \sec^2 x \operatorname{tg} x\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx \\ &= \int u\,du + \ln|\cos x| \\ &= \tfrac{u^2}{2} + \ln|\cos x| + C \\ &= \tfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

$u = \operatorname{tg} x\quad du = \sec^2 x\,dx$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int d\theta \\
&= \theta + C \\
&= \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

$x = 2\operatorname{sen}\theta,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$dx = 2\cos\theta\ d\theta$

(d) Da definição de integral imprópria e usando a substituição $u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}\,dx$ vemos que

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{\ln b}\frac{1}{u}\,du = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b) = +\infty.$$

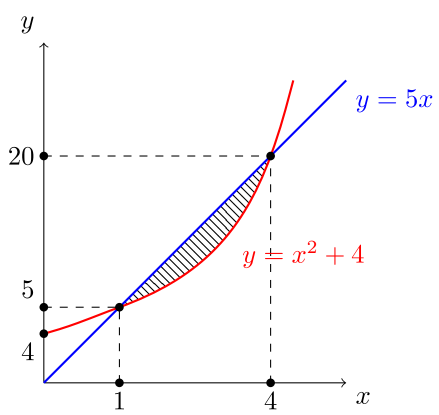
Logo a integral diverge.

2. [2 pontos] Considere o sólido **S** gerado pela rotação da região limitada pelo gráfico das funções $y = 5x$ e $y = x^2 + 4$ em torno do eixo $y = 1$. Calcule o volume do sólido **S** e faça um esboço para justificar o método usado.

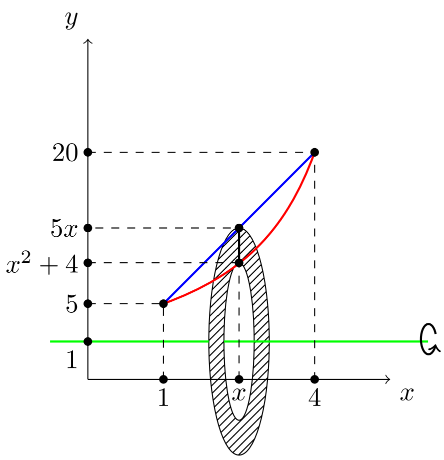
Solução: Vamos calcular as interseções das curvas. Substituindo $y = 5x$ na equação da parábola temos que

$$5x = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Com isso podemos ver que as curvas se intersectam nos pontos $(1,5)$ e $(4,20)$. Abaixo temos um esboço da região entre as curvas.



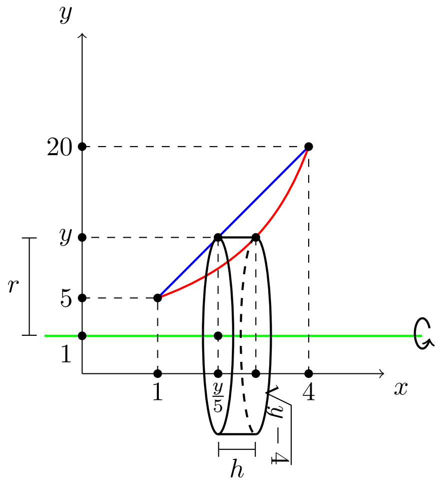
(a) A seguir temos um esboço da seção transversal do sólido perpendicular ao eixo x.



Como essa seção transversal é um disco centrado no eixo $x = 4$ podemos ver que, para cada $x \in [1, 4]$, a área desse disco é $A(x) = \pi\left((5x-1)^2 - (x^2+3)^2\right)$. Portanto, o volume $\mathbf{V}$ do sólido S é dado por:

$$\mathbf{V} = \int_1^4 A(x)\; dx = \int_1^4 \pi\left((5x-1)^2 - (x^2+3)^2\right)\; dx = \frac{477\pi}{5}.$$

(b) Fixado $y \in [5, 20]$ construímos a casca cilíndrica correspondente como na figura abaixo.



Podemos ver que esta casca cilíndrica tem raio $r(y) = y - 1$ e altura $h(y) = \sqrt{y-4} - \frac{y}{5}$, portanto temos que o volume é dado por

$$\mathbf{V} = \int_5^{20} 2\pi r(y)h(y)\; dy = \int_5^{20} 2\pi(y-1)(\sqrt{y-4} - \frac{y}{5})\; dy.$$

3. Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + 2y = f(x).$$

em cada um dos casos:

(a) [1 ponto] $f(x) = 0$.

(b) [1 ponto] $f(x) = -2\cos 2x$.

(c) [1 ponto] $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\cos x^3}$.

Solução:

(a) Considere a EDO $y'' + 2y' + 2y = 0$. Resolvendo o polinômio característico associado temos que

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Com isso as soluções fundamentais da EDO são $y_1(x) = e^{-x}\cos x$ e $y_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y_h(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(b) Considere a EDO $y'' + 2y' + y = -2\cos 2x$. Do item anterior temos a solução geral da EDO homogênea associada. Usando o Método dos Coeficientes a Determinar sabemos uma solução particular da EDO é da forma

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x.$$

Substituindo na EDO obtemos que $A = \frac{1}{5}$ e $B = -\frac{2}{5}$, daí, $y_p(x) = \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} 2x$. Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} 2x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(c) Considere a EDO $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}$. Do item (a) temos a solução geral da EDO homogênea associada. Vamos usar o Método da Variação dos Parâmetros para determinar uma solução particular para esta EDO. Queremos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = u(x)e^{-x}\cos x + v(x)e^{-x}\operatorname{sen} x,$$

onde u e v satisfazem

$$\begin{cases} u'e^{-x}\cos x + v'e^{-x}\operatorname{sen} x = 0 \\ \\ -u'e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x) + v'e^{-x}(-\operatorname{sen} x + \cos x) = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

Cancelando e^{-x} nas equações e substituindo a primeira na segunda obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u'\cos x + v'\operatorname{sen} x = 0 \\ \\ -u'\operatorname{sen} x + v'\cos x = \frac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que $u'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ e $v' = \sec^2 x$. Integrando ambas as equações obtemos que $u(x) = -\frac{\sec^2 x}{2}$ e $v(x) = \operatorname{tg} x$.

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - \frac{\sec^2 x}{2}e^{-x}\cos x + \operatorname{tg} x e^{-x}\operatorname{sen} x.$$

4. [1 ponto] Enuncie o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para equações de 2ª ordem lineares e dê um exemplo de como aplicá-lo.