Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Simulado da 3ª prova de Cálculo 2 – 2/2012

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	1	3	2	10
Notas:					

Nome:____________________________________ Matr.:________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Classifique e resolva cada uma das seguintes EDOs

   (a) [1 ponto] $y' = \operatorname{tg}(x)y + \cos x$

   (b) [1 ponto] $y' = -\dfrac{x+y}{x}$

   (c) [1 ponto] $y' = -\dfrac{6xy + 3x^2y + y^3}{3x^2 + 3y^2}$

   (d) [1 ponto] $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$

Solução:

(a) **Classificação:** EDO de 1ª ordem linear.

Colocando a EDO na forma $y' - \operatorname{tg}(x)y = \cos x$ temos que $\mu = e^{\int -\operatorname{tg} x\ dx} = \cos x$ é um fator integrante. Neste caso, multiplicando a equação por este fator integrante obtemos

$$(\cos(x)y)' = \cos^2 x \Rightarrow \cos(x)y = \int \cos^2 x\ dx + C \Rightarrow \cos(x)y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = \frac{x}{2\cos x} + 2\operatorname{sen} x + C.$$

(b) **Classificação:** EDO de 1ª ordem linear.

Colocando a EDO na forma $y' + \frac{y}{x} = -1$ temos que $\mu = e^{\int \frac{1}{x}\ dx} = x$ é um fator integrante. Neste caso, multiplicando a equação por este fator integrante obtemos

$$(xy)' = -1 \Rightarrow xy = -x + C.$$

Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = -1 + \frac{C}{x}.$$

(c) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear.

Colocando a EDO na forma

$$(6xy + 3x^2y + y^3)dx + (3x^2 + 3y^2)dy = 0,$$

note que $M(x,y) = 6xy + 3x^2y + y^3$ e $N(x,y) = 3x^2 + 3y^3$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial M}{\partial y} = 6x + 3x^2 + 3y^2$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2$ também são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ a equação não é exata. Entretanto,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 1.$$

Daí, temos que $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$ é um fator integrante que torna a EDO exata, ou seja, multiplicando a EDO por μ temos que

$$e^x(6xy + 3x^2y + y^3)dx + e^x(3x^2 + 3y^2)dy = 0,$$

é exata. Com isso, queremos encontrar uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^x(6xy + 3x^2y + y^3) \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^x(3x^2 + 3y^2). \tag{1}$$

Integrando a segunda equação em relação a y obtemos que

$$\psi(x, y) = e^x(3x^2y + y^3) + g(x).$$

Derivando esta equação em relação a x e substituindo a primeira equação de (1) temos que

$$g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x + C.$$

Com isso podemos tomar

$$\psi(x, y) = e^x(3x^2y + y^3) + x.$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente pela seguinte equação

$$e^x(3x^2y + y^3) + x = C.$$

(d) **Classificação:** EDO de 2ª ordem linear.

A equação $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$ é uma EDO de Euler-Cauchy. Com isso supondo que a solução é da forma $y(x) = x^r$ e substituindo na EDO obtemos que

$$r(r-1) - 6r + 10 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = 5.$$

Neste caso $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$, $\forall\ x > 0$ são soluções fundamentais da EDO e portanto a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^5, \quad x > 0.$$

2. [1 ponto] A taxa com que uma gota esférica se evapora, $\frac{dV}{dt}$, é proporcional a sua área. Determine o raio da gota em função do tempo, supondo que no instante $t = 0$ o seu raio é r_0 e que em uma hora o seu raio seja a metade.

Solução: Note que o problema é modelado pela seguinte equação diferencial

$$\frac{dV}{dt} = 4k\pi r^2(t),$$

onde $V(t)$ é o volume e $r(t)$ é o raio da gota esférica no instante t e k é a constante de proporcionalidade. Como $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ temos que

$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi r(t)^2\frac{dr(t)}{dt}.$$

Substituindo essa equação na equação original temos que

$$r'(t) = k \Rightarrow r(t) = kt + C.$$

Daí,

$$r(0) = r_0 \Rightarrow C = r_0$$

e

$$r(1) = \frac{r_0}{2} \Rightarrow k + r_0 = \frac{r_0}{2} \Rightarrow k = -\frac{r_0}{2}.$$

Com isso obtemos que

$$r(t) = -\frac{r_0}{2}t + r_0.$$

Note que $r(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Logo o raio da gota em função do tempo é dado por

$$r(t) = -\frac{r_0}{2}t + r_0, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

3. Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + y = f(x)$$

em cada um dos casos:

(a) [1 ponto] $f(x) = 0$.

(b) [1 ponto] $f(x) = x^2 + x$.

(c) [1 ponto] $f(x) = \cot x$.

Solução:

(a) Considere a EDO $y'' + y = 0$. Resolvendo o polinômio característico associado temos que

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Com isso as soluções fundamentais da EDO são $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(b) Considere a EDO $y'' + y = x^2 + x$. Do item anterior temos a solução geral da EDO homogênea associada. Usando o Método dos Coeficientes a Determinar sabemos uma solução particular da EDO é da forma

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2.$$

Substituindo na EDO obtemos que $A = -2$, $B = 1$ e $C = 1$, daí, $y_p(x) = -2 + x + x^2$. Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - 2 + x + x^2, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

(c) Considere a EDO $y'' + y = \cot x$. Do item (a) temos a solução geral da EDO homogênea associada. Vamos usar o Método da Variação dos Parâmetros para determinar uma solução particular para esta EDO. Queremos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = u(x) \cos x + v(x) \operatorname{sen} x,$$

onde u e v satisfazem

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \operatorname{sen} x = 0 \\ \\ -u' \operatorname{sen} x + v' \cos x = \cot x. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que $u'(x) = -\cos x$ e $v' = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$. Integrando ambas as equações obtemos que $u(x) = -\operatorname{sen} x$ e $v(x) = \cos x + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x|$.

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| \operatorname{sen} x.$$

4. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

(a) [0,5 pontos] Verifique que $y_1(x) = x$ é solução da EDO.
(b) [0,5 pontos] Encontre o intervalo de validade da solução.
(c) [1 ponto] Encontre a solução geral do PVI.

Solução:

(a) Basta substituir na EDO.

(b) Colocando a EDO é linear de 2ª ordem linear na forma

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{2}{(1-x^2)}y = 0$$

vemos que $p(x) = \frac{2x}{(1-x^2)}$ e $q(x) = \frac{2}{(1-x^2)}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Neste caso, pelo T.E.U.S.L, temos que existe uma única solução para o PVI dado no intervalo $(-1, 1)$.

(c) Vamos determinar uma segunda solução usando o método da redução de ordem. Suponha que $y_2(x) = u(x)x$ seja solução da EDO. Substituindo na EDO obtemos que

$$x(1-x^2)u'' + (2-4x^2)u' = 0.$$

Fazendo $v = u'$ e substituindo na última equação obtemos que

$$x(1-x^2)v' + (2-4x^2)v = 0.$$

Daí, como a EDO é separável, temos que

$$\frac{v'}{v} = \frac{4x^2-2}{x(1-x^2)} \Rightarrow \ln|v| = \int \frac{4x^2-2}{x(1-x^2)}dx = \ln\frac{1}{x^2|x^2-1|} \Rightarrow v = \frac{1}{x^2|x^2-1|}.$$

Com isso,

$$u' = \frac{1}{x^2|x^2-1|} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x}.$$

Portanto temos que a segunda solução para a EDO é

$$y_2(x) = \frac{x}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1.$$

Vejamos se y_1 e y_2 são soluções fundamentais. Note que

$$W[y_1, y_2](x) = \det\begin{pmatrix} x & \frac{x}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1 \\ & \\ 1 & \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x}{x^2-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2-1} \neq 0, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

Logo y_1 e y_2 são LI em $(-1, 1)$ e portanto a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = C_1 x + C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1\right).$$

Substituindo as condições iniciais temos que $C_1 = -1$ e $C_2 = 1$. Logo a solução do PVI é dada por

$$y(x) = -x + \frac{x}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$