



3ª prova de Cálculo 2 – Turma E1 – 2/2012  
25/03/2013

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	1	3	2	10
Bonus:	0	0	0	0	0
Notas:					

Nome: \_\_\_\_\_ Matr.: \_\_\_\_\_

**Observações:** A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Classifique e resolva cada uma das seguintes EDOs

(a) [1 ponto]  $y' = x^3y - 4x^3$

(c) [1 ponto]  $(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$

(b) [1 ponto]  $y' = \frac{xy}{2x^2 + 3y^2 - 20}$

(d) [1 ponto]  $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$

**Solução:**

(a) **Classificação:** EDO de 1ª ordem linear

Escrevendo a EDO na forma

$$y' - x^3y = -4x^3,$$

temos  $\mu = e^{\int -x^3 dx} = e^{-\frac{x^4}{4}}$  é um fator integrante. Com isso, multiplicando a EDO por  $\mu$  temos que

$$e^{-\frac{x^4}{4}} y' - x^3 e^{-\frac{x^4}{4}} y = -4x^3 e^{-\frac{x^4}{4}} \Rightarrow (e^{-\frac{x^4}{4}} y)' = -4x^3 e^{-\frac{x^4}{4}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^4}{4}} y = \int -4x^3 e^{-\frac{x^4}{4}} dx$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^4}{4}} y = \int -4x^3 e^{-\frac{x^4}{4}} dx = 4e^{-\frac{x^4}{4}} + C$$

$$\Rightarrow y = 4 + Ce^{\frac{x^4}{4}}$$

(b) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear

Podemos reescrever a EDO da seguinte forma

$$-xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0.$$

Note que  $M(x, y) = -xy$  e  $N(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 20$  são de classe  $C^\infty$ . Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x,$$



não são iguais a EDO não é exata. Entretanto, como

$$\frac{1}{M} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = -\frac{5}{y}$$

temos que  $\mu(y) = e^{\int -\frac{5}{y} dy} = \frac{1}{y^5}$  é um fator integrante que torna a EDO exata. Com isso, multiplicando a EDO por  $\mu$ , temos que a seguinte EDO é exata

$$-\frac{x}{y^4} dx + \left( \frac{2x^2}{y^5} + \frac{3}{y^3} + \frac{20}{y^5} \right) dy = 0.$$

Assim, queremos encontrar  $\psi$  tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{x}{y^4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2x^2}{y^5} + \frac{3}{y^3} + \frac{20}{y^5}. \quad (1)$$

Integrando a primeira equação em relação a  $x$  temos que

$$\psi(x, y) = -\frac{x^2}{2y^4} + g(y).$$

Derivando esta equação em relação a  $y$  e substituindo na segunda equação de (1) temos que

$$\frac{2x^2}{y^5} + g'(y) = \frac{2x^2}{y^5} + \frac{3}{y^3} + \frac{20}{y^5} \Rightarrow g(y) = -\frac{9}{y^4} - \frac{100}{y^6} + C.$$

Com isso temos que

$$\psi(x, y) = -\frac{x^2}{2y^4} - \frac{9}{y^4} - \frac{100}{y^6}.$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente pela seguinte equação

$$-\frac{x^2}{2y^4} - \frac{9}{y^4} - \frac{100}{y^6} = C.$$

(c) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear.

Fazendo a substituição  $v = x - 2y$  e  $y' = \frac{1-v'}{2}$  temos que

$$(2v + 5) \frac{1 - v'}{2} + v + 3 = 0 \Rightarrow \frac{2v + 5}{4v + 11} v' = 1 \Rightarrow \int \frac{2v + 5}{4v + 11} dv = x + c$$

$$\Rightarrow \int 2 + \frac{1}{5 + 2v} dv = x + c$$

$$\Rightarrow 2v + \frac{1}{2} \ln |5 + 2v| = x + c$$

$$\Rightarrow 2x - 4y + \frac{1}{2} \ln |5 + 2x - 4y| = x + c.$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente pela seguinte equação

$$2x - 4y + \frac{1}{2} \ln |5 + 2x - 4y| = x + c.$$

(d) **Classificação:** EDO de 2ª ordem não linear Fazendo a substituição  $v = y'$  temos que

$$v' = \sqrt{1 - v^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int dx + c = x + c$$

$$\Rightarrow \arcsen v = x + c \Rightarrow v = \text{sen}(x + c)$$

$$\Rightarrow y' = \text{sen}(x + c) \Rightarrow y = -\cos(x + c).$$



2. [1 ponto] Sabendo-se que a taxa de desintegração de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância existente em cada instante de tempo e que a meia vida é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade dessa substância. Se um isótopo radioativo tem meia vida de 16 dias e você deseja ter 30 g do isótopo em 30 dias, calcule a quantidade inicial do isótopo.

**Solução:** Sejam  $y(t)$  a quantidade da substância radiativa em  $t$  dias e  $y_0$  a quantidade inicial da substância. Neste caso temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = ky, & t > 0 \\ y(0) = y_0, & y(16) = \frac{y_0}{2}, \end{cases}$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade.

Vamos inicialmente encontrar uma solução geral para a EDO. Como a EDO é separável temos que

$$\frac{y'}{y} = k \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k dt \Rightarrow \ln |y| = kt + C \Rightarrow y = C_1 e^{kt}$$

Com isso a solução geral da EDO é

$$y(t) = C_1 e^{kt}, \quad \forall t > 0.$$

Substituindo as condições iniciais temos que

$$y(0) = y_0 \Rightarrow C_1 = y_0$$

e

$$y(16) = \frac{y_0}{2} \Rightarrow k = \ln \left( \frac{1}{2} \right)^{t/16}.$$

Com isso temos que a solução do PVI é

$$y(t) = y_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{t/16}, \quad t > 0.$$

Queremos encontrar  $y_0$  tal que  $y(30) = 30$ . Substituindo na solução do PVI temos que

$$y(30) = 30 \Rightarrow 30 = y_0 \frac{1}{2^{15/8}} \Rightarrow y_0 = 30 \times 2^{15/8}.$$

Logo, para se ter 30 g do isótopo em 30 dias devemos ter aproximadamente 110g da substância inicialmente.

3. Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + 2y = f(x).$$

em cada um dos casos:

(a) [1 ponto]  $f(x) = 0$ .

(b) [1 ponto]  $f(x) = -2 \cos 2x$ .

(c) [1 ponto]  $f(x) = \frac{e^{-x}}{\cos x^3}$ .

**Solução:**

- (a) Considere a EDO  $y'' + 2y' + 2y = 0$ . Resolvendo o polinômio característico associado temos que

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$



Com isso as soluções fundamentais da EDO são  $y_1(x) = e^{-x} \cos x$  e  $y_2(x) = e^{-x} \sin x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y_h(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- (b) Considere a EDO  $y'' + 2y' + y = -2 \cos 2x$ . Do item anterior temos a solução geral da EDO homogênea associada. Usando o Método dos Coeficientes a Determinar sabemos uma solução particular da EDO é da forma

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Substituindo na EDO obtemos que  $A = \frac{1}{5}$  e  $B = -\frac{2}{5}$ , daí,  $y_p(x) = \frac{1}{5} \cos 2x - \frac{2}{5} \sin 2x$ . Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{5} \cos 2x - \frac{2}{5} \sin 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (c) Considere a EDO  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}$ . Do item (a) temos a solução geral da EDO homogênea associada. Vamos usar o Método da Variação dos Parâmetros para determinar uma solução particular para esta EDO. Queremos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = u(x)e^{-x} \cos x + v(x)xe^{-x} \sin x,$$

onde  $u$  e  $v$  satisfazem

$$\begin{cases} u'e^{-x} \cos x + v'xe^{-x} \sin x = 0 \\ -u'e^{-x}(\cos x + \sin x) + v'e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

Cancelando  $e^{-x}$  nas equações e substituindo a primeira na segunda obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \sin x = 0 \\ -u' \sin x + v' \cos x = \frac{1}{\cos^3 x}. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que  $u'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^3 x}$  e  $v' = \sec^2 x$ . Integrando ambas as equações obtemos que  $u(x) = -\frac{\sec^2 x}{2}$  e  $v(x) = \tan x$ .

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{\sec^2 x}{2} e^{-x} \cos x + \tan x e^{-x} \sin x.$$

4. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \\ y(-1) = -\frac{e-1}{e}, \quad y'(-1) = 1 \end{cases}$$

- (a) [0,5 pontos] Verifique que  $y_1(x) = x$  é solução da EDO.  
(b) [0,5 pontos] Encontre o intervalo de validade da solução.  
(c) [1 ponto] Encontre a solução geral do PVI.

**Solução:**



(a) Basta substituir na EDO.

(b) Colocando a EDO é linear de 2ª ordem linear na forma

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

vemos que  $p(x) = -\frac{x+2}{x}$  e  $q(x) = \frac{x+2}{x^2}$  são contínuas em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pelo T.E.U.S.L, temos que existe uma única solução para o PVI dado em  $(-\infty, 0)$ .

(c) Vamos determinar uma segunda solução usando o método da redução de ordem. Suponha que  $y_2(x) = u(x)x$  seja solução da EDO. Substituindo na EDO obtemos que

$$x^3(u'' - u') = 0 \Rightarrow u'' - u' = 0.$$

Note que esta última equação é de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes, assim temos que

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 1.$$

Daí, sabemos que as soluções fundamentais desta EDO são  $u_1 = 1$  e  $u_2 = e^x$ . Descartando a primeira temos que  $y_2 = xe^x$ . Vejamos se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções fundamentais. Note que

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x(1+x) \end{pmatrix} = x^2e^x \neq 0, \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$

Logo  $y_1$  e  $y_2$  são LI em  $(0, +\infty)$  e portanto a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = C_1x + C_2xe^x.$$

Substituindo as condições iniciais temos que  $C_1 = 1$  e  $C_2 = 1$ . Logo a solução do PVI é dada por

$$y(x) = x + xe^x \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$