Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

2ª prova de Cálculo 2 – 2/2012
05/02/2013

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	2	4	4	0	10
Bonus:	0	0	0	1	1
Notas:					

Nome:______________________________ Matr.:______________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

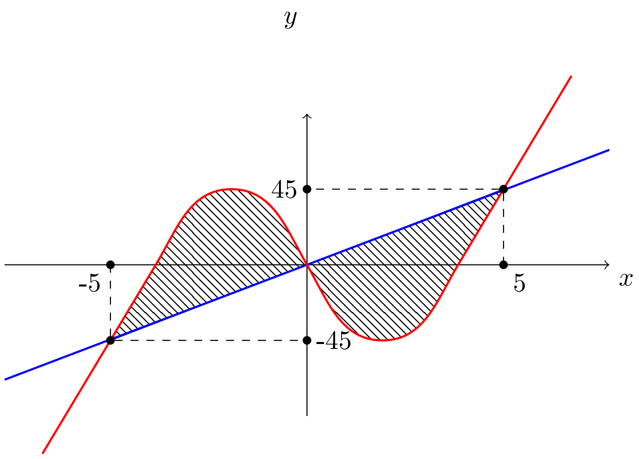
1. [2 pontos] Esboce a região limitada pelas curvas $y = x^3 - 16x$ e $y = 9x$ e calcule sua área.

Solução:
Primeiramente vamos calcular as interseções das curvas. Note que

$$x^3 - 16x = 9x \Rightarrow x^3 - 25x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 25) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

Substituindo estes valores em uma das equações obtemos que os gráficos se intersectam nos pontos $(0, 0)$, $(-5, -45)$ e $(5, 45)$.

Com isso temos o seguinte esboço da região entre as figuras.



Daí, temos que a área da região é

$$\int_{-5}^{5} x^3 - 25x \; dx + \int_{-5}^{5} 25x - x^3 \; dx = \frac{625}{2}$$

2. Considere o sólido **S** gerado pela rotação da região limitada pelo gráfico das funções $y = 5x$ e $y = x^2 + 4$ em torno do eixo $y = 1$.

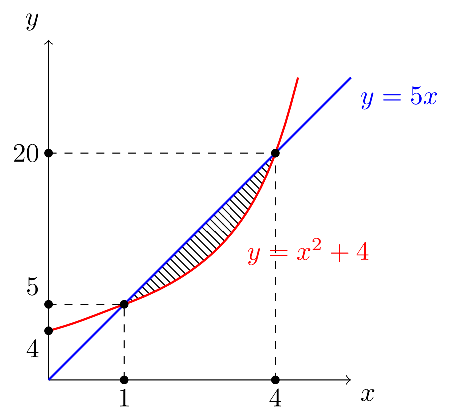
(a) [2 pontos] Usando o método dos discos escreva a integral que expressa o volume do sólido **S** e faça um esboço para justificar a escolha dos raios dos discos.

(b) [2 pontos] Usando o método das cascas cilíndricas escreva a integral que expressa o volume do sólido **S** e faça um esboço para justificar a escolha do raio e da altura das cascas cilíndricas.

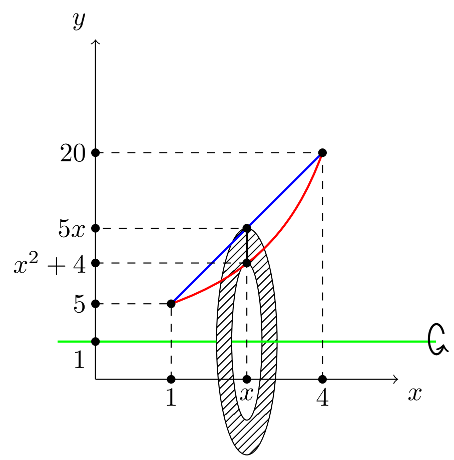
Solução: Vamos calcular as interseções das curvas. Substituindo $y = 5x$ na equação da parábola temos que

$$5x = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Com isso podemos ver que as curvas se intersectam nos pontos $(1, 5)$ e $(4, 20)$. Abaixo temos um esboço da região entre as curvas.



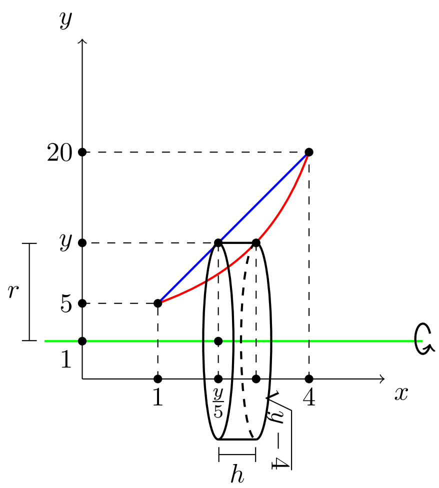
(a) A seguir temos um esboço da seção transversal do sólido perpendicular ao eixo x.



Como essa seção transversal é um disco centrado no eixo $x = 4$ podemos ver que, para cada $x \in [1, 4]$, a área desse disco é $A(x) = \pi\left((5x-1)^2 - (x^2+3)^2\right)$. Portanto, o volume **V** do sólido S é dado por:

$$\mathbf{V} = \int_1^4 A(x)\, dx = \int_1^4 \pi\left((5x-1)^2 - (x^2+3)^2\right)\, dx.$$

(b) Fixado $y \in [5, 20]$ construímos a casca cilíndrica correspondente como na figura abaixo.



Podemos ver que esta casca cilíndrica tem raio $r(y) = y - 1$ e altura $h(y) = \sqrt{y-4} - \frac{y}{5}$, portanto temos que o volume é dado por

$$\mathbf{V} = \int_5^{20} 2\pi r(y)h(y)\ dy = \int_5^{20} 2\pi(y-1)(\sqrt{y-4} - \frac{y}{5})\ dy.$$

3. Decida sobre a convergência das integrais abaixo:

(a) [2 pontos] $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\ dx$

(b) [2 pontos] $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x + \operatorname{sen} x}\ dx$

Solução:

(a) Da definição de integral imprópria e usando a substituição $u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}\ dx$ vemos que

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\ dx = \lim_{b \to +\infty} \int_e^{b} \frac{1}{x \ln x}\ dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{u}\ du = \lim_{b \to +\infty} \ln(\ln b) = +\infty.$$

Logo a integral diverge.

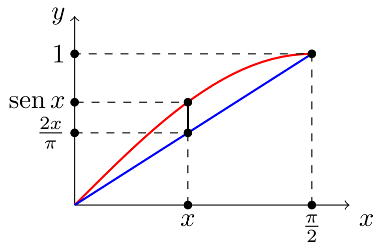
(b) Note que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x + \operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Logo, como $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x}\ dx$ diverge, pelo teste da comparação no limite, a integral em questão também diverge.

4. [1 bonus] Encontre o volume do sólido no primeiro octante cuja base é a região limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = 2x/\pi$ e cujas seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados.

Solução: Note que $(\frac{\pi}{2}, 1)$ e $(0, 0)$ são os pontos de interseção das curvas. Fixando $x \in [0, \pi/2]$ construímos o segmento de reta, entre as duas curvas, formado pelos pontos de abscissa x, como na figura abaixo.



Como esta região é a base do sólido e as seções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados temos que este segmento é a base de um desses quadrados. Com isso, a área das seções transversais é dada por $A(x) = \left(\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi}\right)^2, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, o volume do sólido é dado por

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi}\right)^2 \, dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{4}{\pi}$$