Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

1ª prova de Cálculo 2 – 2/2012
07/01/2013

Questão:	1	2	3	Total
Pontos:	6	2	2	10
Notas:				

Nome:____ Matr.:____________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Calcule as seguintes integrais

(a) [2 pontos] $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

(b) [1 ponto] $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

(c) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(d) [2 pontos] $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= -\int_{\pi}^{\pi/2}\cos u\,du \\ &= -\operatorname{sen} u\,\Big|_{u=\pi}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1\end{aligned}$$

$u=\frac{1}{x}$ $\quad du=-\frac{1}{x^2}\,dx$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int (\sec^2 x-1)\operatorname{tg} x\,dx \\ &= \int \sec^2 x\operatorname{tg} x\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx \\ &= \int u\,du + \ln|\cos x| \\ &= \frac{u^2}{2}+\ln|\cos x|+C \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

$u=\operatorname{tg} x$ $\quad du=\sec^2 x\,dx$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \\ &= \operatorname{arcsen}\tfrac{x}{2} + C\end{aligned}$$

$x = 2\operatorname{sen}\theta,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$dx = 2\cos\theta\ d\theta$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx &= \int \frac{2}{z(1+z^2)}\,dx \\ &= \int \frac{2}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\,dz \\ &= 2\ln|z| - \ln(1+z^2) + C \\ &= \ln\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1+\cos x)}\right) + C \\ &= \ln\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\right) + C \\ &= \ln(1-\cos x) + C\end{aligned}$$

$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

frações parciais

$z = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$

2. Suponha que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f(0) = -1$. Se

$$g(x) = \int_1^{x^2} f(t)\ dt,$$

mostre que

(a) [1 ponto] O gráfico de g tem uma tangente horizontal em $x = 0$.

(b) [1 ponto] O gráfico de g tem um máximo local em $x = 0$.

Solução:

(a) Pela regra de Leibniz temos que

$$g'(x) = 2xf(x^2) \Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 0f(0) = 0.$$

Com isso temos que 0 é ponto crítico de g e portanto o gráfico de g tem uma tangente horizontal em $x = 0$.

(b) Derivando novamente a função g temos que

$$g''(x) = 2f(x^2) + 4x^2 f'(x^2) \Rightarrow g''(0) = 2f(0) = -2 < 0,$$

logo 0 é ponto de máximo local.

3. Considere a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx,$$

(a) [1 ponto] Use esta fórmula para calcular $\int x^3 e^x \, dx$.

(b) [1 ponto] Use integração por partes e demostre esta fórmula.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^x \, dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x \, dx \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 \int e^x \, dx \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C
\end{aligned}$$

(b) Fazendo $u = x^n$ e $dv = e^x dx$ temos que $du = nx^{n-1} \, dx$ e $v = e^x$. Usando a integração por partes temos que

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

— Era uma vez — começou o Diretor — quando Nosso Ford ainda estava neste mundo, um rapazinho chamado Reuben Rabinovitch. Reuben era filho de pais de língua polonesa. — O Diretor interrompeu-se: — Suponho que sabem o que é o polonês, não?

— Uma língua morta.

— Como o francês e o alemão — acrescentou outro, exibindo com zelo seus conhecimentos.

— E "pais"? - perguntou o D.I.C.

Fez-se um silêncio embaraçado. Vários rapazes coraram. Ainda não tinham aprendido a fazer a distinção, importante mas por vezes muito sutil, entre a indecência e a ciência pura. Um deles, por fim, teve a coragem de levantar a mão.

— Os seres humanos, antigamente, eram. . . — Hesitou; o sangue subiu-lhe às faces. — Enfim, eram vivíparos.

— Muito bem. — O Diretor aprovou com um sinal de cabeça.

— E quando os bebês eram decantados. . .

— Nasciam — corrigiu ele.

— Bom, então, eram os pais. . . isto é, não os bebês, está claro; os outros. — O pobre rapaz estava atrapalhadíssimo.

— Em uma palavra — resumiu o Diretor — os pais eram o pai e a mãe. — Essa indecência, que, na realidade, era ciência, caiu com estrépito no silêncio daqueles jovens, que não ousavam olhar-se. — A mãe — repetiu ele em voz alta, para fazer penetrar bem fundo a ciência; e, inclinando-se para trás da cadeira, disse gravemente: — São fatos desagradáveis, eu sei. Mas é que a maioria dos fatos históricos são mesmo desagradáveis.

Trecho de Admirável Mundo Novo, de Aldous Huxley.

Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Regras de Derivação

$\frac{d}{dx}c = 0$

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$

$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (regra da cadeia)

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (regra do produto)

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (regra do quociente)

Tabela de Derivadas

$\frac{d}{dx}x = 1$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cossech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$

$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Substituição Tangente do Ângulo Médio

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$