Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

1ª prova de Cálculo 2 – 2/2012
19/12/2012

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	2	2	2	10
Notas:					

Nome:____ Matr.:________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Calcule as seguintes integrais

(a) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(b) [1 ponto] $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)dx$

(c) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-x-22}{x^2+3x-10}\,dx$

(d) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \int \sec u\ du \\ &= \ln(\sec u + \operatorname{tg} u) + C \\ & \ln(\sec(\sqrt{x}) + \operatorname{tg}(\sqrt{x})) + C\end{aligned}$$

$u = \sqrt{x}\ \ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\ dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x\ dx \\ &= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C\end{aligned}$$

$\operatorname{sen} a\cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$.

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+5x^2-x-22}{x^2+3x-10}\ dx &= \int x+2+\frac{3x-2}{x^2+3x-10}\ dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x\int \frac{4}{7(x-2)} + \frac{17}{7(x+5)}\ dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{4}{7}\ln(x-2) + \frac{17}{7}\ln(x+5) + C\end{aligned}$$

(d)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{4}\right)^2}} \qquad \tfrac{3x}{4} = \operatorname{sen}\theta,\ dx = \tfrac{4}{3}\cos\theta\,d\theta,\ -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cos\theta}{|\cos^2\theta|}d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int d\theta = \theta + C$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{3x}{4}\right) + C$$

2. [2 pontos] A função

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

é chamada função de **Fresnel** e aparece no estudo da difração de ondas de luz. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x^3}.$$

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{S(x)}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ podemos aplicar a regra de L'Hopital, daí, pela regra de Leibniz, temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)}{3x^2} = \frac{\pi}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)}{\frac{\pi x^2}{2}} = \frac{\pi}{6}\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{\pi}{6}.$$

3. [2 pontos] Sem usar nenhuma técnica de integração calcule

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x^6+4x^4+1}dx$$

Solução: Seja $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^6+4x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Como

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)^6+4(-x)^4+1} = \frac{-\operatorname{sen} x}{x^6+4x^4+1} = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

temos que f é ímpar. Logo,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{x^6+4x^4+1}dx = 0.$$

4. Considere as seguintes fórmulas de recorrência:

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx,$$

$$\int x^n\operatorname{sen} x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx.$$

(a) [1 ponto] Use estas fórmulas para calcular

$$\int x^5 \cos x \; dx.$$

(b) [1 ponto] Use integração por partes e demostre uma das fórmulas.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\int x^5 \cos x \; dx &= x^5 \operatorname{sen} x - 5 \int x^4 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20 \int x^3 \cos x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x + 60 \int x^2 \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120 \int x \cos x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x - 120 \int \operatorname{sen} x \; dx \\
&= x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C
\end{aligned}$$

(b) Vamos mostra a primeira das fórmulas. Fazendo $u = x^n$ e $dv = \cos x \; dx$ temos que $du = nx^{n-1}dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Usando a integração por partes temos que

$$\int x^n \cos x \; dx = x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} \operatorname{sen} x \; dx.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
POLO UNIVERSITÁRIO DE RIO DAS OSTRAS – PURO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – RIC
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA – RFM

Regras de Derivação

$\frac{d}{dx}c = 0$

$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (regra do produto)

$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$

$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (regra da cadeia)

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (regra do quociente)

Tabela de Derivadas

$\frac{d}{dx}x = 1$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{cotgh} x = -\operatorname{cossech}^2 x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\coth x \operatorname{cossech} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$

$\frac{d}{dx}\operatorname{arccossech} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$

$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Substituição Tangente do Ângulo Médio

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$