Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Verificação Suplementar de Cálculo 2 – 1/2012
01/11/2012

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	2	3	1	10
Notas:					

Nome:____ Matr.:__________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Calcule

   (a) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

   (b) [1 ponto] $\displaystyle\int x\ln x\; dx$

   (c) [1 ponto] $\displaystyle\int \frac{3x^4+x^2-5x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\; dx$

   (d) [1 ponto] $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\; dx$

Solução:

(a)

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

$u = \ln x \quad du = 1/x\; dx$

(b)

$$\int x\ln x\; dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\; dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$u = \ln x \quad du = 1/x\; dx$
$dv = x\; dx \quad v = x^2/2$

(c)

$$\int \frac{3x^4+x^2-5x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\; dx$$
$$= \int \frac{3}{x+1} - \frac{5x}{(x^2+1)^2}\; dx$$
$$= 3\ln|x+1| - \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= 3\ln|x+1| + \frac{5}{2u} + c$$
$$= 3\ln|x+1| + \frac{5}{2(x^2+1)} + c$$

$$\frac{3x^4+x^2-5x+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{5x}{(x^2+1)^2}$$

$u = x^2+1, \quad du = 2x\; dx$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx &= 3\int_0^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\;3\cos\theta\,d\theta \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta+\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

$x = 3\operatorname{sen}\theta,\quad dx = 3\cos\theta d\theta,\quad 0 \le \theta \le \pi/2$

2. Diga se as seguintes integrais impróprias convergem ou divergem

(a) [1 ponto] $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(b) [1 ponto] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

Solução:

(a) Da questão 1 item (a) podemos ver que

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} &= \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{dx}{x\ln^2 x} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+1\right) = 1
\end{aligned}$$

Logo a integral converge.

(b) Note que a o integrando não está definido em $x = 0$. Vamos usar o teste da comparação no limite com a função $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $0 < x < 1$. Note que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \overset{L'H}{=} \sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}} = 1.$$

Logo, como $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, temos que a integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ também converge.

3. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-4y}{4x+y} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(a) [1 ponto] Classifique a EDO.

(b) [1 ponto] Encontre a solução geral da EDO.

(c) [1 ponto] Enconte a solução do PVI.

Solução:

(a) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear.

(b) Note que a EDO pode ser reescrita na forma

$$4ydx + (4x+y)dy = 0.$$

Sejam $M(x,y) = 4y$ e $N(x,y) = 4x + y$. Como M e N são de classe C^∞ e $\frac{\partial M}{\partial y} = 4 = \frac{\partial N}{\partial x}$ em $\mathbb{R}^2$, temos que a EDO é exata em $\mathbb{R}^2$.

Com isso podemos encontrar ψ tal que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$. Neste caso,

$$\psi = \int 4y\ dx + g(y) = 4xy + g(y).$$

Daí temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N \Rightarrow 4x + g'(y) = 4x + y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Com isso temos que $\psi(x,y) = 4xy + \frac{y^2}{2}$ e portanto a solução geral da EDO é dada implicitamente por

$$4xy + \frac{y^2}{2} = c$$

(c) Substituindo a condição inicial na solução geral temos que $c = \frac{9}{2}$, portanto a solução do PVI é dada implicitamente por

$$4xy + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

4. [1 ponto] Considere a EDO

$$y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3\cos 2x$$

.

(a) Mostre que $y_p = -\dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{12\operatorname{sen} 2x - 9\cos 2x}{25}$ é solução da EDO.

(b) Encontre a solução geral da EDO.

Solução:

(a) Note que

$$y_p'' + 2y_p' + y_p$$

$$= \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{36\cos 2x - 48\operatorname{sen} 2x}{25}\right) + 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{24\cos 2x + 18\operatorname{sen} 2x}{25}\right) - \frac{\cos x}{2} + \frac{12\operatorname{sen} 2x - 9\cos 2x}{25}$$
$$= \operatorname{sen} x + 3\cos 2x.$$

(b) Resolvendo o polinômio característico:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Com isso sabemos que as soluções da EDO homogênea associada $y'' + 2y' + 1 = 0$ são $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + -\frac{\cos x}{2} + \frac{12 \operatorname{sen} 2x - 9\cos 2x}{25},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$