UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
POLO UNIVERSITÁRIO DE RIO DAS OSTRAS – PURO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – RIC
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA – RFM

3ª Prova de Cálculo 2 – 1/2012
24/11/2012

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	2	3	1	10
Notas:					

Nome:______________________________________ Matr.:______________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Classifique e resolva as seguintes EDO's
   (a) [2 pontos] $(4y + 3x^2 - 3xy^2)y' = y^3 - 6xy$
   (b) [1 ponto] $xy' - 2\sqrt{y-1} = 0$
   (c) [1 ponto] $\dfrac{(x^2+1)}{x}y' = -2y + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solução:

(a) **Classificação:** EDO, de 1ª ordem não linear.

Como a EDO não é separável e nem linear vamos verificar se é exata. Note que a EDO pode ser reescrita na forma

$$6xy - y^3 + (4y + 3x^2 - 3xy^2)y' = 0.$$

Podemos ver que $M(x, y) = 6xy - y^3$ e $N(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$ são C^∞ em $\mathbb{R}^2$ e que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto a EDO é exata em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, sabemos que existe uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y). \tag{1}$$

Vamos determinar ψ com essa propriedade. Integrando a primeira equação em (1) em relação a x obtemos

$$\psi(x, y) = 3x^2y - xy^3 + g(y).$$

Derivando ψ obtida nesta última equação e usando a segunda equação em (1) obtemos que

$$g'(y) = 4y.$$

Daí, integrando em relação a y temos que $g(y) = 2y^2 + C$. Com isso obtemos que

$$\psi(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C.$$

Logo, sabemos que a solução geral da EDO é definida implicitamente pela equação

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C_1,$$

onde C_1 é uma constante arbitrária.

(b) **Classificação:** EDO, de 1ª ordem não linear.

Note que,

$$xy' - 2\sqrt{y-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y-1}}y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{y-1}}dy = \int \frac{1}{x}dx + C$$
$$\Rightarrow \sqrt{y-1} = \ln(x) + c_1 \Rightarrow y = 1 + (\ln(cx))^2.$$

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = 1 + (\ln(cx))^2,$$

onde c é uma constante arbitrária.

(c) **Classificação:** EDO, de 1ª ordem linear.

Como a EDO é linear, reescrevendo-a da na forma

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}, \tag{2}$$

obtemos o fator integrante

$$\mu = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{\ln x^2+1} = x^2 + 1.$$

Multiplicando a equação (2) pelo fator integrante e usando a regra do produto temos que

$$((x^2+1)y)' = \operatorname{sen} x.$$

Daí, integrando em relação a x obtemos que

$$y(x) = -\frac{\cos x + c}{x^2+1},$$

onde c é uma constante arbitrária.

2. [2 pontos] Encontre a solução do PVI e determine seu intervalo de validade.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y^2-1} \\ \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente vamos encontrar a solução geral da edo.

$$y' = \frac{x}{y^2-1} \Rightarrow (y^2-1)y' = x \Rightarrow \int y^2 - 1dy = \int x\ dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^2}{2} + c.$$

Logo, a solução geral da edo é dada implicitamente pela equação

$$\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^2}{2} + c.$$

Substituindo a condição inicial vemos que $c = -2$, daí, a solução da edo satisfaz a seguinte equação

$$\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^2}{2} - 2.$$

Podemos ver que esta última equação não impõe nenhuma restrição a x ou y, neste caso, para encontrarmos o intervalo de validade, basta analisarmos as restrições sobre a derivada. Da EDO vemos que y' existe se, e somente se, $y^2 - 1 \neq 0$, ou seja, $y \neq \pm 1$.

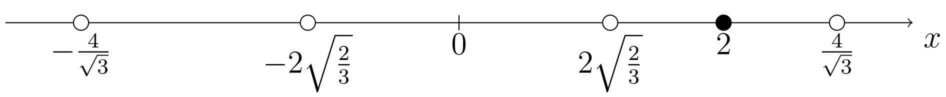
Para $y = -1$ temos que

$$\frac{x^2}{2} - 2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Para $y = 1$ temos que

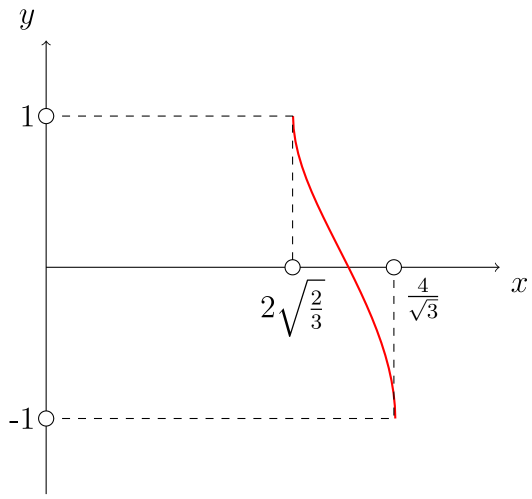
$$\frac{x^2}{2} - 2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Com isso a derivada está definida para todo $x \neq \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ e $x \neq \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Como o ponto $x = 2$ está no domínio da solução temos que o intervalo de validade da solução é $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. Logo a solução da EDO é dada implicitamente pela equação

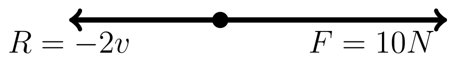
$$\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^2}{2} - 2,\ \forall x \in \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$



3. Um bote motorizado e seu tripulante têm uma massa de 120 quilogramas e estava inicialmente no repouso. O motor exerce uma força constante de 10 newtons, na direção do movimento. A resistência exercida pela água, ao movimento, é, em módulo, igual ao dobro da velocidade.
   (a) [1 ponto] Determine a velocidade do bote em função do tempo.
   (b) [1 ponto] Determine a velocidade limite do bote.
   (c) [1 ponto] Faça um esboço do gráfico da velocidade em função do tempo.

Solução:

(a) Vamos denotar por $v(t)$ a velocidade do bote em um instante t. Tomando positivo como o sentido do movimento temos o seguinte diagrama de forças



Com isso, da segunda Lei de Newton, obtemos o seguinte PVI

$$\begin{cases} 120v' = 10 - 2v \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo a EDO:

$$\begin{aligned} 120v' = 10 - 2v &\Rightarrow \frac{v'}{5-v} = \frac{1}{60} \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{5-v} dv = \int \frac{1}{60} dt + c_1 \\ &\Rightarrow -\ln(5-v) = \frac{t}{60} + c_1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{5-v} = c_2 e^{\frac{t}{60}} \\ &\Rightarrow v = 5 + c_3 e^{-\frac{t}{60}} \end{aligned}$$

Com isso a solução geral da EDO é

$$v(t) = 5 + ce^{-\frac{t}{60}}, \ \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo a condição inicial obtemos

$$0 = v(0) = 5 + c \Rightarrow c = -5.$$

Daí, a velocidade do bote em função do tempo é dada por

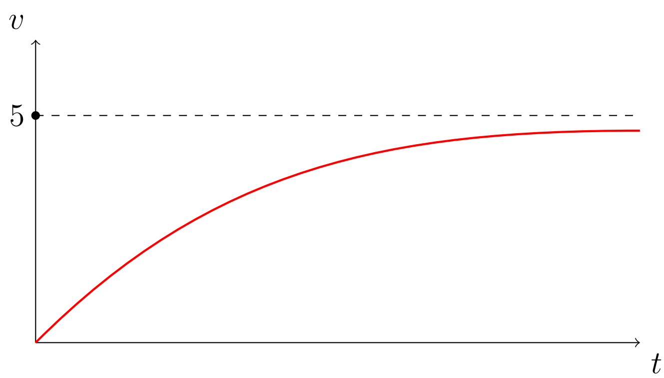
$$v(t) = 5 - 5e^{-\frac{t}{60}}, \ \forall t \geq 0.$$

(b) Note que

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} 5 - 5e^{-\frac{t}{60}} = 5.$$

Portanto a velocidade do bote é $5m/s$.

(c) O gráfico da velocidade em função do tempo segue abaixo



4. [1 ponto] Mostre que a função $y_p(x) = \frac{x}{2}e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é uma solução particular da EDO $y'' - y = e^x$ e encontre a solução geral.

Solução:

Note que

$$y_p''(x) - y_p(x) = \left(e^x + \frac{x}{2}e^x\right) - \frac{x}{2}e^x = e^x,$$

Logo y_p é solução da EDO.

Para encontrar a solução geral da EDO vamos encontrar a solução geral da EDO homegênea associada $y'' - y = 0$.

Encontrado as raízes do polinômio característico:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1.$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$