Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

3ª prova de Cálculo 2– Turma C1 – 2/2012
25/03/2013

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	4	1	3	2	10
Notas:					

Nome:____ Matr.:____________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Classifique e resolva cada uma das seguintes EDOs

   (a) [1 ponto] $xy' + y + 4 = 0$

   (b) [1 ponto] $y' = \dfrac{yx^3}{x^4 + y^4}$

   (c) [1 ponto] $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

   (d) [1 ponto] $xy'' - y' = x$

Solução:

(a) **Classificação:** EDO de 1ª ordem linear.

$$xy' + y + 4 = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y+4} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y+4| = \ln\frac{1}{|x|} + C \Rightarrow y = \frac{C}{x} - 4.$$

(b) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear.

Podemos reescrever a EDO na seguinte forma

$$-yx^3dx + (x^4 + y^4)dy = 0.$$

Como $M(x,y) = -yx^3$ e $N(x,y) = x^4 + y^4$ são polinômios temos que são de classe C^∞. Note que,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3,$$

daí, a equação não é exata. Entretanto, como

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{5}{y},$$

temos que $\mu(y) = e^{\int -\frac{5}{y}dy} = \frac{1}{y^5}$ é um fator integrante que torna a EDO exata, ou seja, a seguinte EDO é exata

$$-\frac{x^3}{y^4}dx + \left(\frac{x^4}{y^5} + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Neste caso queremos encontrar ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{x^3}{y^4} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^4}{y^5} + \frac{1}{y} \tag{1}$$

Integrando a primeira em relação a x temos que

$$\psi(x,y) = -\frac{x^4}{4y^4} + g(y).$$

Derivando esta equação em relação a y e usando a segunda equação de (1) temos que

$$\frac{x^4}{y^5} + g'(y) = \frac{x^4}{y^5} + \frac{1}{y} \Rightarrow g(y) = \ln|y| + C.$$

Com isso temos que

$$\psi(x,y) = -\frac{x^4}{4y^4} + \ln|y|.$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente pela seguinte equação:

$$-\frac{x^4}{4y^4} + \ln|y| + C = 0.$$

(c) **Classificação:** EDO de 1ª ordem não linear

Dividindo a EDO por x^2 e fazendo a substituição $v = y/x$ $y' = v'x + v$ temos que

$$2\frac{y}{x}y' - \frac{y^2}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow 2v(v'x+v) - v^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2v}{1+v^2}v' = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2v}{1+v^2}dv = -\int \frac{1}{x}dx + C$$

$$\Rightarrow \ln(1+v^2) = \ln\frac{1}{|x|} + C = \ln\frac{C}{|x|}$$

$$\Rightarrow 1 + v^2 = \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = Cx.$$

Logo a solução geral é dada pela última equação.

(d) **Classificação:** EDO de 2ª ordem linear.

Fazendo $v = y'$ temos que a seguinte equação linear de 1ª ordem

$$xv' - v = x \Rightarrow\Rightarrow v' - \frac{v}{x} = 1.$$

Neste caso, multiplicando $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$ pela equação anterior temos que

$$-\frac{v'}{x} + \frac{v}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \left(-\frac{v}{x}\right)' = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{v}{x} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow y' = x\ln|x| + C_1 x$$

$$\Rightarrow y = C_2 x^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| + C_3$$

2. [1 ponto] Suponha que em uma comunidade de 100 pessoas inicialmente 10 pessoas sejam portadoras de um vírus e que a taxa com que o vírus se espalha na comunidade seja proporcional tanto ao número de pessoas infectadas como também ao número de pessoas não infectadas. Se for observado que após 2 semanas 20 pessoas estão infectadas, determine o número de pessoas infectadas em função do tempo.

Solução: Seja $y(t)$ o número de pessoas infectadas em t semanas. Neste caso temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' = ky(100-y), \quad t > 0 \\ \\ y(0) = 10, \quad y(2) = 20, \end{cases}$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Vamos inicialmente encontrar uma solução geral para a EDO. Como a EDO é separável temos que

$$\frac{y'}{y(100-y)} = k \Rightarrow \int \frac{1}{y(100-y)}\, dy = \int k\, dt \Rightarrow \int \frac{1}{100y} + \frac{1}{100(100-y)}\, dy = kt + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}\ln|y| - \frac{1}{100}\ln|100-y| = kt + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}\ln\left|\frac{y}{100-y}\right| = kt + C \Rightarrow \frac{y}{100-y} = C_1 e^{kt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{100C_1e^{kt}}{1+C_1e^{kt}}.$$

Com isso a solução geral da EDO é

$$y = \frac{100C_1e^{kt}}{1+C_1e^{kt}}, \quad \forall\, t > 0.$$

Substituindo as condições iniciais temos que

$$y(0) = 10 \Rightarrow \frac{100C_1}{1+C_1} = 10 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{9}$$

e

$$y(2) = \frac{100e^{2k}}{9+e^{2k}} = 20 \Rightarrow k = \ln\frac{3}{2}.$$

Com isso temos que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{100(3/2)^t}{9+(3/2)^t}, \quad t > 0.$$

3. Encontre a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + y = f(x).$$

em cada um dos casos:

(a) [1 ponto] $f(x) = 0$.

(b) [1 ponto] $f(x) = 2x^2$.

(c) [1 ponto] $f(x) = e^{-x}\ln x$.

Solução:

(a) Considere a EDO $y'' + 2y' + y = 0$. Resolvendo o polinômio característico associado temos que

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Com isso as soluções fundamentais da EDO são $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = xe^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo a solução geral da EDO é dada por

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(b) Considere a EDO $y''+2y'+y = 2x^2$. Do item anterior temos a solução geral da EDO homogênea associada. Usando o Método dos Coeficientes a Determinar sabemos uma solução particular da EDO é da forma

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2.$$

Substituindo na EDO obtemos que $A = 12$, $B = -8$ e $C = 2$, daí, $y_p(x) = 12 - 8x + 2x^2$. Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 12 - 8x + 2x^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(c) Considere a EDO $y''+2y'+y = e^{-x}\ln x$. Do item (a) temos a solução geral da EDO homogênea associada. Vamos usar o Método da Variação dos Parâmetros para determinar uma solução particular para esta EDO. Queremos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = u(x)e^{-x} + v(x)xe^{-x},$$

onde u e v satisfazem

$$\begin{cases} u'e^{-x} + v'xe^{-x} = 0 \\ -u'e^{-x} + v'e^{-x}(1-x) = e^{-x}\ln x. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que $u'(x) = -x\ln x$ e $v' = \ln x$. Integrando ambas as equações obtemos que $u(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x$ e $v(x) = -x + x\ln x$.

Logo a solução geral da EDO é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-x}x^2\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right).$$

4. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

(a) [0,5 pontos] Verifique que $y_1(x) = e^{x^2}$ é solução da EDO.

(b) [0,5 pontos] Encontre o intervalo de validade da solução.

(c) [1 ponto] Encontre a solução geral do PVI.

Solução:

(a) Basta substituir na EDO.

(b) Como $p(x) = -4x$ e $q(x) = 4x^2 - 2$ são contínuas em $\mathbb{R}$, pelo T.E.U.S.L, temos que existe uma única solução para o PVI dado em $\mathbb{R}$.

(c) Vamos determinar uma segunda solução usando o método da redução de ordem. Suponha que $y_2(x) = u(x)e^{x^2}$ seja solução da EDO. Substituindo na EDO obtemos que

$$e^{x^2}u''(x) = 0 \Rightarrow u''(x) = 0 \Rightarrow u(x) = x.$$

Portanto temos que a segunda solução para a EDO é

$$y_2(x) = xe^{x^2}.$$

Vejamos se y_1 e y_2 são soluções fundamentais. Note que

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} e^{x^2} & xe^{x^2} \\ 2xe^{x^2} & e^{x^2}(1+2x^2) \end{pmatrix} = e^{x^4} \neq 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo y_1 e y_2 são LI em $\mathbb{R}$ e portanto a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = C_1 e^{x^2} + C_2 xe^{x^2}.$$

Substituindo as condições iniciais temos que $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$. Logo a solução do PVI é dada por

$$y(x) = e^{x^2} - xe^{x^2}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$