Universidade Federal Fluminense – UFF
Polo Universitário de Rio das Ostras – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

Reposição da 2ª Prova de Cálculo 2 – 1/2012
16/10/2012

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	5	2	2	1	10
Notas:					

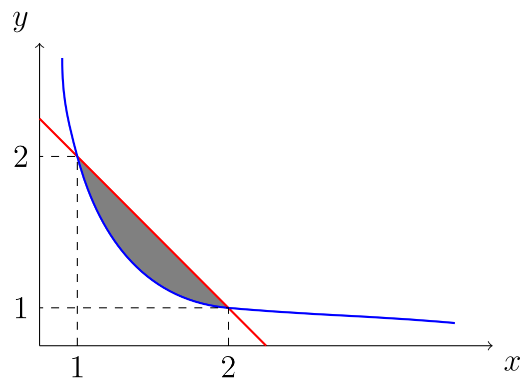
Nome:____Matr.:________________

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Considere as curvas $y = -x + 3$ e $y = \dfrac{2}{x}$
   (a) [1 ponto] Esboçe a região limitada por estas curvas.
   (b) [1 ponto] Calcule a área da região limitada pelas.
   (c) [2 pontos] Represente, pelo método dos discos e das cascas cilíndricas, o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas.
   (d) [1 ponto] Escolha uma das representações anteriores para calcular o volume.

Solução:

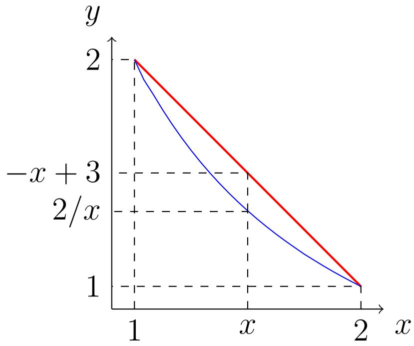
(a) A região limitada pelas curvas é a região sombreada abaixo.



(b) A área é dada por

$$\int_1^2 -x + 3 - \frac{2}{x}dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

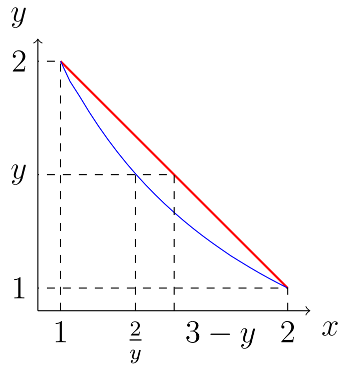
(c) Analisando novamente a região limitada pelas curvas vemos que



Daí, concluímos que o volume do sólido de revolução é representado, pelo método dos discos, por

$$\pi \int_1^2 (-x+3)^2 - \frac{4}{x^2} dx.$$

Do mesmo modo,



Daí, concluímos que o volume do sólido de revolução é representado, pelo método das cascas cilíndricas, por

$$2\pi \int_1^2 y \left(3 - y - \frac{2}{y}\right) dy$$

(d) O volume do sólido é dado por:

$$2\pi \int_1^2 y \left(3 - y - \frac{2}{y}\right) dy = \frac{\pi}{3}.$$

2. [2 pontos] Calcule a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$$

Solução:

Como o integrando não está definido em $x = 0$ e fazendo a mudança de variável $u = \operatorname{sen} x$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx &= \lim_{b\to 0^+} \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx \\
&= \lim_{b\to 0^+} \int_{\operatorname{sen} b}^{1} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du \\
&= \lim_{b\to 0^+} 2\sqrt{u}\,\Big|_{\operatorname{sen} b}^{1} \\
&= \lim_{b\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\operatorname{sen} b}\right) = 2.
\end{aligned}$$

3. Diga se as integrais impróprias abaixo convergem ou divergem:
   (a) [1 ponto] $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
   (b) [1 ponto] $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Solução:

(a) Note que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1.$$

Logo, como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, pelo teste da comparação no limite, temos que a integral $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ também converge.

(b) Note, pela regra de L'Hopital, que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Logo, como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge, pelo teste da comparação no limite, temos que a integral $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ também converge.

4. [1 ponto] Determine o valor de k para o qual a seguinte integral convirja

$$\int_2^{\infty} \frac{kx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1} dx.$$

Solução: Note que

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{kx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{kx}{x^2+2} - \frac{1}{2x+1} dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\left(\frac{k}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) \right)\Big|_2^b \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+2)^k}{2x+1} \right)\Big|_2^b \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\frac{(b^2+2)^k}{2b+1} - \ln\frac{6^k}{5} \right] \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(b^{2k-1}\frac{(1+\frac{2}{b^2})^k}{2+\frac{1}{b}} \right) - \ln\frac{6^k}{5} \right].
\end{aligned}$$

Como este último limite só existe quando $k=\frac{1}{2}$, temos que este é o único valor de k para o qual a integral converge.