Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM

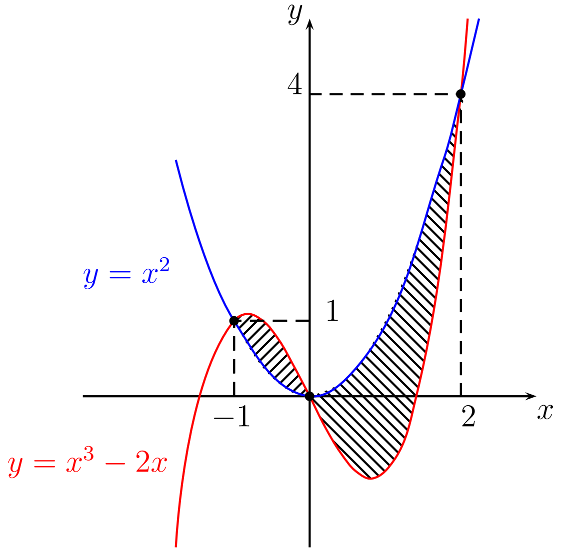
Gabarito da 2ª prova de Cálculo II – 2/2011

Questão 1: Esboçar a região lmitada pelas curvas $y = x^3 - 2x$ e $y = x^2$ e encontrar sua área.

Solução:
Note que

$$x^3 - 2x = x^2 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Assim a curvas se interceptam nos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ e $(2, 4)$ como podemos ver no esboço abaixo.

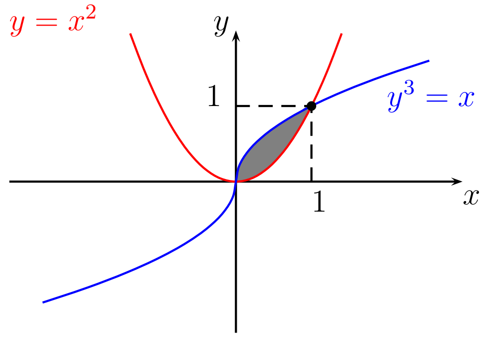


Com isso temos que a área da região é

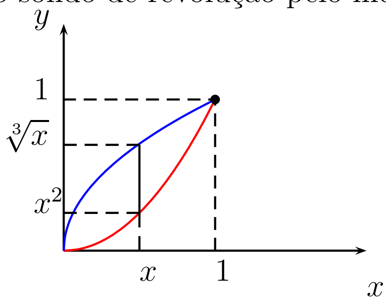
$$\int_{-1}^{0} x^3 - 2x - x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 - x^3 + 2x dx = \frac{37}{12}$$

Questão 2: Calcule, pelo método dos discos e das cascas cilíndricas, o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y^3 = x$ e $y = x^2$

Solução: A área sombreada abaixo é a região que gera o sólido de revolução.

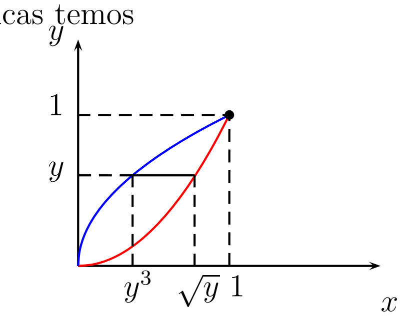


Com isso temos que o volume do sólido de revolução pelo método dos discos é dado por:



$$\int_0^1 \pi(x^{2/3} - x^4)dx = \frac{2\pi}{5}.$$

Pelo método das cascas cilíndricas temos



$$\int_0^1 2\pi y(\sqrt{y} - y^3)dy = \frac{2\pi}{5}.$$

Questão 3: Diga se a integral imprópria abaixo converge ou diverge:

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Solução:

Como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ para todo $x \geq 0$ podemos aplicar o teste da comparação no limite com a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 > 0.$$

Logo, como a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, temos que a integral dada também converge.

Questão 4: Decida para quais valores de p a integral imprópria converge ou diverge.

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}x^p dx.$$

Solução: Faremos a comparação com a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^p}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-2}}{e^x} = 0, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Logo, como $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, temos que a integral dada também converge.