Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Cálculo II – Gabarito da 1ª prova 2/2011

Questão 1: Calcule as integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos\left(e^{x^2}\right) dx$

Solução: Fazendo a substituição $u = e^{x^2}$ $du = 2xe^{x^2}$, temos que

$$\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2} \cos\left(e^{x^2}\right) dx = \int_0^{\pi} \cos u \; du = \operatorname{sen} u\Big|_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 1 = -\operatorname{sen} 1$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}dx \\
&= \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta - 1)\cos\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}d\theta \\
&= \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta - 1)\cos\theta}{\cos\theta}d\theta \\
&= \int 2\operatorname{sen}\theta - 1 \; d\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{3-2x-x^2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

Completando quadrado

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \operatorname{sen}\theta & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \frac{\pi}{2} \\ x = 2\operatorname{sen}\theta - 1 & dx = 2\cos\theta \end{cases}$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$

Solução: Note que

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}dx = \int \frac{x^3+1-1}{x^3+1}dx = \int 1 - \frac{1}{x^3+1}dx = x - \int \frac{1}{x^3+1}dx.$$

Vamos resolver a última integral pelo método das frações parciais. Note que

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Como $x^2 - x + 1$ é irredutível devemos determinar $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Daí,

$$A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = 1.$$

Fazendo $x = -1, x = 0$ e $x = 1$ obtemos que $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ e $C = \frac{2}{3}$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3 + 1} dx &= \int \frac{1}{3(x + 1)} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 4}{x^2 - x + 1} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{-3}{x^2 - x + 1} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx
\end{aligned}$$

Esta última integral resolveremos separadamente. Note que completando quadrado do denominador temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx \\
&= \frac{4}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\
&= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{x^3}{x^3 + 1} dx = x - \frac{1}{3} \ln|x + 1| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

d) $\int \frac{1}{3+\cos x} dx$

Solução: Fazendo a substituição $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ temos que

$$\int \frac{1}{3+\cos x} dx = \int \frac{1}{3+\frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{2+z^2} dz = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} dz$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Questão 2: Encontre uma fórmula de recorrência para

$$\int \ln^n x \; dx$$

Solução: Por partes, fazendo

$$\begin{array}{ll} u = \ln^n x & du = n \ln^{n-1}(x) \frac{1}{x} \\ dv = dx & v = x, \end{array}$$

temos que

$$\int \ln^n x \; dx = x \ln^n x - n \int \ln^{x-1} x \; dx.$$

Questão 3: Determine os pontos críticos de

$$f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t \; dt$$

Solução: Pela regra de Leibniz,

$$f'(x) = \ln x - 2x \ln x^2 = \ln x - 4x \ln x = \ln x(1-4x).$$

Daí,

$$\ln x(1-4x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 1.$$

Questão 4: Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em $[0, 1]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$$

Solução: Seja $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ e tome a seguinte partição de $[0,1]$

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

onde $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1$. Daí, note que $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e tome $c_i = \frac{i}{n}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Com isso,

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}.$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$