Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Cálculo II – Gabarito da $3^{\underline{a}}$ prova – 06/10 – 2/2011

Questão 1 (3 pontos): Classifique as equações abaixo.

a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

b) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$

c) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Solução:

a) EDO de 2ª ordem linear.

b) EDO de 3ª ordem não-linear.

c) EDP de 2ª ordem.

Questão 2 (3 pontos): Considere a EDO

$$t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1$$

a) Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2 = \dfrac{1}{t}$ são soluções fundamentais da EDO homogênea associada no intervalo $(0, +\infty)$.

b) Encontre uma solução particular da EDO e dê a solução geral.

Solução:

a) Note que $y_1' = 2t$ e $y_1'' = 2$, daí,

$$t^2y_1'' - 2y_1 = 2t^2 - 2t^2 = 0,$$

portanto y_1 é solução da EDO homogênea.

Do mesmo modo, $y_2' = -1/t^2$ e $y_2'' = 2/t^3$, daí,

$$t^2y_2'' - 2y_2 = \frac{2}{t} - \frac{2}{t} = 0.$$

portanto y_2 é solução da EDO homogênea.

Colocando a EDO na forma

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 0,$$

sabemos que, como $p(t) = 0$ e $q(t) = -\frac{2}{t^2}$ são contínuas em $(0, +\infty)$, o espaço das soluçoes da EDO homogênea é um espaço vetorial de dimensão 2 e que, neste caso, duas soluções geram o espaço se, e somente se, $W[y_1, y_2]$ não se anula em $(0, +\infty)$. Com isso, note que

$$W[y_1, y_2] = \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix} = -3,$$

logo y_1 e y_2 são soluções fundamentais da EDO homogênea.

b) Vamos determinar uma solução da EDO via o método da variação dos parâmetros. Procuramos uma solução particular da forma:

$$y_p = ut^2 + \frac{v}{t},$$

onde u e v são funções a serem determinadas tais que

$$u't^2 + \frac{v'}{t} = 0. \tag{1}$$

Derivando y_p e substituindo na EDO, obtemos que

$$2t^3u' - v' = 3t^2 - 1. \tag{2}$$

Multiplicando a equação (1) por t e somando com a equação (2) temos que

$$u' = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3}. \tag{3}$$

Integrando a última equação obtemos que

$$u = \ln|t| + \frac{1}{6t^2}.$$

Substituindo a (3) na equação (1) obtemos que

$$v' = \frac{1-3t^2}{3},$$

daí, integrando em relação a t vemos que

$$v = \frac{t-t^3}{3}.$$

Portanto, uma solução particular da EDO é

$$y_p(t) = t^2\ln(t) + \frac{1-t^2}{3} + \frac{1}{6},\ \forall t \in (0, +\infty).$$

Com isso, a solução geral da EDO é

$$y(t) = c_1t^2 + c_2t + t^2\ln(t) + \frac{1-t^2}{3} + \frac{1}{6},\ \forall t \in (0, +\infty).$$

Questão 3 (3 pontos): Encontre a solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t} \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: Considerando a EDO na forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

vemos que $p(t) = -2$, $q(t) = -3$ e $f(t) = 3te^{2t}$ são contínuas $\forall t \in \mathbb{R}$. Com isso, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, o PVI tem uma única solução definida em $\mathbb{R}$.

Vamos determinar uma solução geral da EDO.

1. Determinaremos a solução da EDO homogênea: $y'' - 2y' - 3y = 0$.

   O polinômio característico associado a EDO é:

   $$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

   É fácil ver que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ são raízes do polinômio. Com isso a solução geral da EDO homogênea é

   $$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Determinaremos uma solução particular da EDO via método dos coeficientes a determinar.

   Procuramos uma solução da EDO da forma $y_p = (A_0 + A_1)e^{2t}$. Neste caso, substituindo na EDO obtemos que

   $$e^{2t}(-3A_0 + 2A_1 - 3A_1 t) = 3te^{2t},$$

   daí, $A_1 = -1$ e $A_2 = -\dfrac{2}{3}$. Logo a solução geral da EDO é

   $$y(t) = y_h + y_p = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \left(\frac{2}{3} + t\right) e^{2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Substituindo as condições iniciais obtemos o sistema

   $$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{3} \\ -c_1 + 3c_2 = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

   Daí, $c_1 = 5/12$ e $c_2 = 5/4$. Logo a solução do PVI é

   $$y(t) = \frac{5}{12} e^{-t} + \frac{5}{4} e^{3t} - \left(\frac{2}{3} + t\right) e^{2t}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Questão 4 (1 ponto): Suponha que uma esfera metálica de raio r e massa m esteja afundando, a partir do repouso, completamente mergulhada em um líquido de densidade ρ. As forças que atuam sobre a esfera são: o peso, devido à gravidade; a força de empuxo, que de acordo com o *Princípio de Arquimedes*, é igual ao peso do líquido deslocado pela esfera; e a força de atrito oposta à sua queda que, de acordo com a lei de Stokes, é igual a $6\pi\mu r v$, onde μ é o coeficiente de viscosidade e v é a velcidade da esfera.

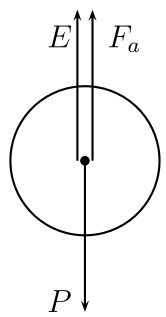
a) Desenhe um diagrama esquemático mostrando as forças agindo na esfera enquanto ela afunda.

b) Escreva uma equação diferencial que modele a velocidade da esfera em função do tempo e encontre-a.

c) Determine a velocidade limite.

Solução:

a) Diagrama



b) Considerando a origem do sistema no fundo do líquido e direção positiva para cima temos que a força peso é $P = -mg$, a força de empuxo é $E = \frac{4\pi r^3}{3}\rho g$ e, como $v < 0$, a força de atrito é $F_a = -6\pi\mu r v$. Com isso, pela segunda lei de Newton,

$$mv' = F_a + P + E = -6\pi\mu r v - mg + \frac{4\pi r^3}{3}\rho g.$$

Daí, temos o PVI

$$\begin{cases} mv' = -6\pi\mu r v - mg + \dfrac{4\pi r^3}{3}\rho g \\ \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Note que a EDO é separável

$$\frac{mv'}{-6\pi\mu r v - mg + \frac{4\pi r^3}{3}\rho g} = 1,$$

daí,

$$mg - \frac{4\pi r^3}{3}\rho g + 6\pi\mu r v = Ce^{\frac{-6\pi\mu r}{m}t}.$$

Substituindo a condição inicial vemos que

$$C = mg - \frac{4\pi r^3}{3}\rho g,$$

Com isso,

$$v(t) = \frac{1}{6\pi\mu r}\left(mg - \frac{4\pi r^3}{3}\rho g\right)\left(e^{\frac{-6\pi\mu r}{m}t} - 1\right).$$

c)

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = -\frac{1}{6\pi\mu r}\left(mg - \frac{4\pi r^3}{3}\rho g\right)$$