Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Cálculo II – Gabarito da VR – 13/10 – 2/2011

Questão 1 : Calcule:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x^2)\ dx$

Solução: Fazendo a substituição $u = x^2$, $du = 2xdx$ temos que

$$\int_0^{\pi} x\cos(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2}\cos(u)\ du = \left.\frac{\text{sen}(u)}{2}\right|_0^{\pi^2} = \frac{\text{sen}(\pi^2)}{2}.$$

b) $\displaystyle\int x\arctan(x)dx$

Solução:

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x)dx &= \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{(x^2+1)}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

Por partes $\begin{cases} u = \arctan(x) & du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv = x\ dx & v = \frac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+13}dx$

Solução:

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^2+6x+13}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(2\tan u - 3)2\sec^2 u}{1+\tan^2 u}dx \\ &= \int \tan u\ du - \frac{1}{2}\int 3\ du \\ &= \ln|\sec u| - \frac{3u}{2} + C \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+6x+13}}{2}\right) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C\end{aligned}$$

$\frac{x+3}{2} = \tan u$, $x = 2\tan u - 3$, $dx = 2\sec^2 u\ du$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}dx$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x^2+4)}dx &= \int \frac{1}{4x} - \frac{x}{4(x^2+4)}dx && \text{frações parciais } \tfrac{1}{x(x^2+4)} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\int \frac{1}{u}du && u = x^2+4,\ du = 2x\ dx. \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln|u| + C \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + C
\end{aligned}$$

Questão 2 : Mostre que a seguinte função é constante:

$$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{x} \frac{1}{1+t^2}dt, \qquad \forall x > 0.$$

Solução: Pela Regra de Leibniz,

$$F'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0,\ \forall x > 0.$$

Logo F é constante.