Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Cálculo II – Gabarito[1] da 2ª prova – 25/10 – 2/2011

Questão 1 Usando a definição de integral imprópria diga se a seguinte integral converge ou diverge, e calcule o valor da integral caso convirja.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

Solução: Fazendo a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$ temos que

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

Daí,

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\bigg|_e^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + 1 \right) = 1$$

Questão 2 Discuta a convergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{3/2}+1} dx$$

Solução: Usando a comparação por limites, com a função $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^{3/2}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2}+1} = 1.$$

Logo, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge, então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{3/2}+1} dx$ também diverge.

Questão 3 Considere a região **R** do primeiro quadrante limitada pelo gráfico das funções $y = x$ e $y = x^2$. Esboce **R** e **expresse** o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de **R** em torno do eixo OX de duas maneiras, usando os métodos das **cascas cilíndricas** e **dos discos circulares**. Escolha um dos métodos e **calcule o volume** do sólido.

Solução:

a) Por discos circulares:

$$\pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{2\pi}{15}$$

b) Por cascas cilíndricas:

$$\int_0^1 2\pi y(\sqrt{y} - y) dy$$

Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Cálculo II – Gabarito^2 $2^{\underline{a}}$ prova – 25/10 – 2/2011

Questão 1 Usando a definição de integral imprópria diga se a seguinte integral converge ou diverge, e calcule o valor da integral caso convirja.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

Solução: Fazendo a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$ temos que

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2u^2} + c = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + c.$$

Daí,

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2(\ln x)^2}\Bigg|_e^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2(\ln b)^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Questão 2 Discuta a convergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+1} dx$$

Solução: Usando a comparação por limites, com a função $g(x) = \frac{1}{x}$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2}+1} = 1.$$

Logo, como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, então $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+1} dx$ também diverge.

Questão 3 Considere a região $\mathbf{R}$ do primeiro quadrante limitada pelo gráfico das funções $y = 2x$ e $y = x^2$. Esboce $\mathbf{R}$ e **expresse** o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathbf{R}$ em torno do eixo OX de duas maneiras, usando os métodos das **cascas cilíndricas** e **dos discos circulares**. Escolha um dos métodos e **calcule o volume** do sólido.

Solução:

a) Por discos circulares:

$$\pi \int_0^2 4x^2 - x^4 dx = \frac{64\pi}{15}$$

b) Por cascas cilíndricas:

$$\int_0^4 2\pi y(\sqrt{y} - \frac{y}{2}) dy$$

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – PURO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Cálculo II – Gabarito[3] da 2ª prova – 25/10 – 2/2011

Questão 1 Usando a definição de integral imprópria diga se a seguinte integral converge ou diverge, e calcule o valor da integral caso convirja.

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

Solução: Fazendo a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$ temos que

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u\ du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Daí,

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_e^{b} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_e^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{(\ln b)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

Questão 2 Discuta a convergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{5/2}+1} dx$$

Solução: Usando a comparação por limites, com a função $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^{5/2}+1}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}}{x^{5/2}+1} = 1.$$

Logo, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge, então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{3/2}+1} dx$ também converge.

Questão 3 Considere a região **R** do primeiro quadrante limitada pelo gráfico das funções $y = 3x$ e $y = x^2$. Esboce **R** e **expresse** o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de **R** em torno do eixo OX de duas maneiras, usando os métodos das **cascas cilíndricas** e **dos discos circulares**. Escolha um dos métodos e **calcule o volume** do sólido.

Solução:

a) Por discos circulares:

$$\pi \int_0^3 9x^2 - x^4 dx = \frac{162\pi}{15}$$

b) Por cascas cilíndricas:

$$\int_0^9 2\pi y(\sqrt{y} - \frac{y}{3})dy$$

Questão 1 Usando a definição de integral imprópria diga se a seguinte integral converge ou diverge, e calcule o valor da integral caso convirja.

$$\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Solução: Fazendo a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$ temos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

Daí,

$$\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{(\ln x)^3}{3} \Bigg|_e^b \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{(\ln b)^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = +\infty$$

Questão 2 Discuta a convergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{5/2} + 1} dx$$

Solução: Usando a comparação por limites, com a função $g(x) = \frac{1}{x^2}$ temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x^{5/2}+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5/2}}{x^{5/2} + 1} = 1.$$

Logo, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, então $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^{5/2} + 1} dx$ também converge.

Questão 3 Considere a região **R** do primeiro quadrante limitada pelo gráfico das funções $y = 4x$ e $y = x^2$. Esboce **R** e **expresse** o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de **R** em torno do eixo OX de duas maneiras, usando os métodos das **cascas cilíndricas** e **dos discos circulares**. Escolha um dos métodos e **calcule o volume** do sólido.

Solução:

a) Por discos circulares:

$$\pi \int_0^4 16x^2 - x^4 dx = \frac{2048\pi}{15}$$

b) Por cascas cilíndricas:

$$\int_0^{16} 2\pi y(\sqrt{y} - \frac{y}{4})dy$$