UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – PURO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Cálculo II – Gabarito da 1ª prova – 22/09 – 2/2011

Questão 1 : Calcule:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{20} x \cos x \; dx$

Solução: Fazendo a substituição $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x \; dx$ temos

$$\int \operatorname{sen}^{20} x \cos x \; dx = \int u^{20} du = \frac{u^21}{21} + C$$

b) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln(x+2) dx$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \ln(x+2) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(x+2)\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{x^3}{x+2} dx \\
&= \frac{8}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\int_0^2 x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2} dx \\
&= \frac{8}{3}\ln 4 - \frac{20}{9} + \frac{8}{3}\ln|x+2|\Big|_0^2 \\
&= \frac{8}{3}\ln 4 - \frac{20}{9} + \frac{8}{3}\ln 4 - \frac{8}{3}\ln 2 \\
&= 8\ln 2 - \frac{20}{9}
\end{aligned}$$

Por partes $\begin{cases} u = \ln(x+2) & du = \frac{1}{x+2} \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$x^3 = (x^2 - 2x + 4)(x+2) - 8$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^{2x}+4)}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(e^{2x}+4)} &= \int \frac{du}{u(u^2+4)} \\
&= \int \frac{1}{4u} - \frac{u}{4(u^2+4)} du \\
&= \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{1}{8}\ln(u^2+4) du + C \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(e^{2x}+4) + C
\end{aligned}$$

Substituição $u = e^x$ $x = \ln u$ $dx = \frac{1}{u} du$

frações parciais

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 - 4x + 8)^2} dx$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2-4x+8)^2}dx &= \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1\right)^2}dx && \text{Substituição } x = 2\operatorname{tg}\theta + 2,\ dx = 2\sec^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^2}d\theta && \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta \\
&= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta \\
&= \frac{\theta}{16} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{64} + C \\
&= \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{(x-2)}{8(x^2-4x+8)} + C && \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

Questão 2 : Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = \int_0^{x^3-3x} e^{t^2}dt$$

Solução:

Derivando, pela regra de Leibniz, temos que

$$f'(x) = e^{(x^3-3x)^2}(3x^2-3) = 3e^{(x^3-3x)^2}(x^2-1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$