6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6), temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação (7), obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}\,[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ □

■ Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a mátematica: $0, 1, e, i$ e π.

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H EXERCÍCIOS

1–14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{2}i)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $2i(\frac{1}{2} - i)$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\, i$

17. $-4i$

18. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, onde n é um inteiro positivo

[*Sugestão:* escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\, i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29–32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\, i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $(1 - \sqrt{3}\, i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

36. $(1 - i)^8$

37–40 Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1

38. As raízes quintas de 32

39. As raízes cúbicas de i

40. As raízes cúbicas de $1 + i$

41–46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$ **44.** $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$ **46.** $e^{\pi+i}$

47. Use o Teorema de De Moivre com $n = 3$ para expressar $\cos 3\theta$ e $\operatorname{sen} 3\theta$ em termos de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função com valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções deriváveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Associe isso à Equação 7 para demonstrar que se $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

50. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma primitiva de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.

I RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE NÚMEROS ÍMPARES

CAPÍTULO 1

EXERCÍCIOS 1.1 ■ PÁGINA 12

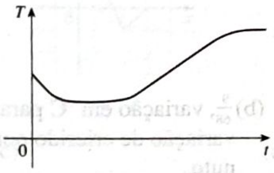
1. (a) -2 (b) 2,8 (c) -3, 1 (d) $-2{,}5$, 0,3
(e) $[-3, 3]$, $[-2, 3]$ (f) $[-1, 3]$

3. $[-85, 115]$ **5.** Não

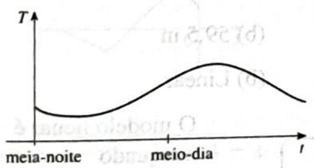
7. Sim, $[-3, 2]$, $[-3, -2) \cup [-1, 3]$

9. Dieta, exercício, ou doença

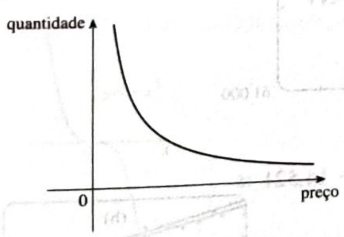
11.



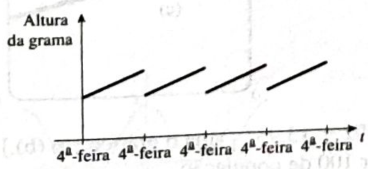
13.



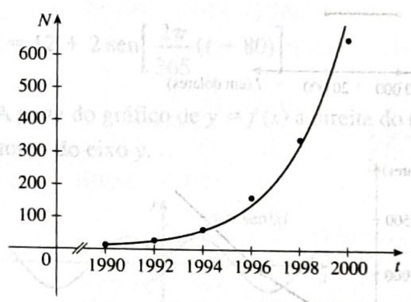
15.



17.



19. (a)



(b) Em milhões: 92; 485

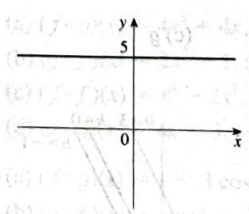
21. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4,$
$6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2,$
$9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

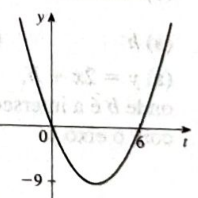
23. $-3 - h$ **25.** $-1/(ax)$

27. $\{x \mid x \neq \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

29. $[0, \infty)$ **31.** $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

33. $(-\infty, \infty)$ **35.** $(-\infty, \infty)$





37. $[5, \infty)$ **39.** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$