Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras – PURO

2ª Prova de Cálculo 1 – Turma V1 – 1/2014
09/05/2014

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	2	2	4	2	10
Notas:					

Nome:____

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Usando apenas a definição de derivada, determine a equação da reta tangente à curva no ponto dado.
   (a) [1 ponto] $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$.
   (b) [1 ponto] $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $(1, 1)$.

Solução:

(a) Seja $f(x) = 2x^3 - 5x$. Sabemos que a equação da reta tangente é da seguinte forma:

$$y = f'(-1)(x+1) + 3.$$

Assim, vamos usar a definição de derivada para determinar $f'(-1)$.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^3 - 5(-1+h) - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 - 6h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} (2h^2 - 6h + 1) = 1 \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é:

$$y = x + 4.$$

(b) Seja $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Como antes, vamos usar a definição de derivada para determinar $f'(1)$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1+h}}{1 + \sqrt{1+h}} \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+h}(1 + \sqrt{1+h})} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é

$$y = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{-x+3}{2}$$

2. [2 pontos] Encontre as assíntotas verticais e horizontais da curva

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Solução:

Assíntotas Horizontais: Basta calcular os limites tendendo a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=2$$

Logo, temos que $y=2$ é a única assíntota horizontal.

Assíntotas Verticais: Devemos procurar pelos pontos onde a função tende a $\pm\infty$. Como a função em questão é uma fração, devemos procurar pelos pontos que anulam o denominador. Neste caso,

$$x^2-5x+6=0\Rightarrow x=2 \text{ ou } x=3.$$

Assim, temos que

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2+x-1}{(x-2)(x-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2+x-1}{(x-2)(x-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3^+}\frac{2x^2+x-1}{(x-2)(x-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+x-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+x-1}{(x-2)(x-3)}=-\infty$$

Logo, as retas $x=2$ e $x=3$ são as assíntotas verticais.

3. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ em cada um dos casos abaixo.

(a) [1 ponto] $y=e^{x\cos x}$

(b) [1 ponto] $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2+1}$

(c) [1 ponto] $x^2y^2+x\operatorname{sen} y=4$

(d) [1 ponto] $y=x^{\operatorname{sen} x}$

Solução:

(a) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x\cos x}(\cos x-x\operatorname{sen} x)$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sec^2 x(x^2+1)-2x\operatorname{tg} x}{(x^2+1)^2}$

(c) $2xy^2+2x^2yy'+\operatorname{sen} y+(x\cos y)y'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{2xy^2+\operatorname{sen} y}{2x^2y+x\cos y}$

(d) $y=x^{\operatorname{sen} x}\Rightarrow \ln y=\operatorname{sen} x\ln x\Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\cos x\ln x+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\Rightarrow y'=x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

4. [2 pontos] Mostre que a função $x^3+x+1=0$ tem uma única raiz real.

Solução:

Sabemos que $f(x) = x^3 + x + 1$ é contínua em $\mathbb{R}$. Como $f(0) = 1 > 0$ e $f(-1) = -1 < 0$, então o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, f possui uma raiz. Agora vamos mostrar que essa é a única raiz.

De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ temos que

$$a < b \Rightarrow a^3 < b^3 \Rightarrow a^3 + a + 1 < b^3 + b + 1 \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Com isso temos que f é crescente, portanto só pode interceptar o gráfico uma única vez!

"Se eu tivesse de responder à seguinte questão: o que é a escravidão?, e a respondesse numa única palavra: é um assassinato, meu pensamento seria logo compreendido. Eu não teria necessidade de um longo discurso para mostrar que o poder de tirar ao homem o pensamento, a vontade, a personalidade é um poder de vida e de morte, e que fazer um homem escravo é assassiná-lo. Por que então a esta outra pergunta: o que é a propriedade?, não posso eu responder da mesma maneira: é um roubo, sem ter a certeza de não ser entendido, embora esta segunda proposição não seja senão a primeira transformada?".

"*A propriedade é um roubo*", Pierre Joseph Proudhon.