UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – RIC
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA – RFM
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – PURO

**1ª Prova de Cálculo 1 – Turma V1 – 1/2014**
**18/03/2014**

| Questão: | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Pontos: | 3 | 2 | 3 | 2 | 10 |
| Notas: | | | | | |

Nome:____________________________________________

**Observações:** A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Determine o domínio das seguintes funções
   (a) [1 ponto] $f(x) = \sqrt{2 - |x-1|}$
   (b) [1 ponto] $f(x) = \dfrac{1}{|x+1| - |x-1|}$
   (c) [1 ponto] $f(x) = \operatorname{arcsen}(2^x - 1)$

**Solução:**

(a) Por definição,
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ 2 - |x-1| \geq 0\}.$$
Neste caso, note que
$$2 - |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3.$$
Logo,
$$D(f) = [-1, 3]$$

(b) Por definição,
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ |x+1| - |x-1| \neq 0\}.$$
Note que,
$$|x+1| - |x-1| = 0 \Rightarrow |x+1| = |x-1| \Rightarrow x+1 = x-1 \text{ ou } -x-1 = x-1 \Rightarrow x = 0.$$
Logo,
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(c) Por definição,
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq 2^x - 1 \leq 1\}.$$
Note que,
$$-1 \leq 2^x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1.$$
Logo,
$$D(f) = (-\infty, 1].$$

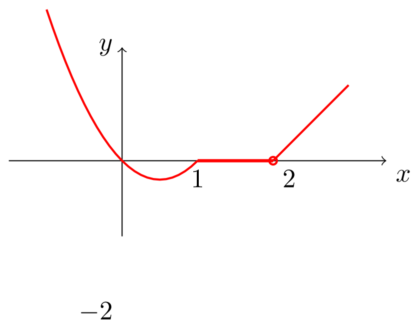
2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$$

(a) [1 ponto] Esboce seu gráfico.

(b) [1 ponto] Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

**Solução:**

(a) O gráfico segue abaixo




(b) Sabemos que a função $g(x) = x^2 - x$ passa de decrescente para crescente no vértice da parábola, ou seja, em $x = 1/2$. Assim, pelo gráfico podemos ver que

$$f \text{ é decrescente em } \left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right].$$

$$f \text{ é crescente em } \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$$

$$f \text{ é constante em } \left[\tfrac{1}{2}, 2\right].$$

3. Seja $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}$.

(a) [1 ponto] Determine o domínio e a imagem de $f$.

(b) [1 ponto] Esboce o gráfico de $f$.

(c) [1 ponto] Resolva a equação

$$\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-3}{x^2+1}$$

**Solução:**

(a) Por definição $D(f) = \mathbb{R}$. Para determinar a imagem observe que se $x \in \mathbb{R}$, então

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}.$$

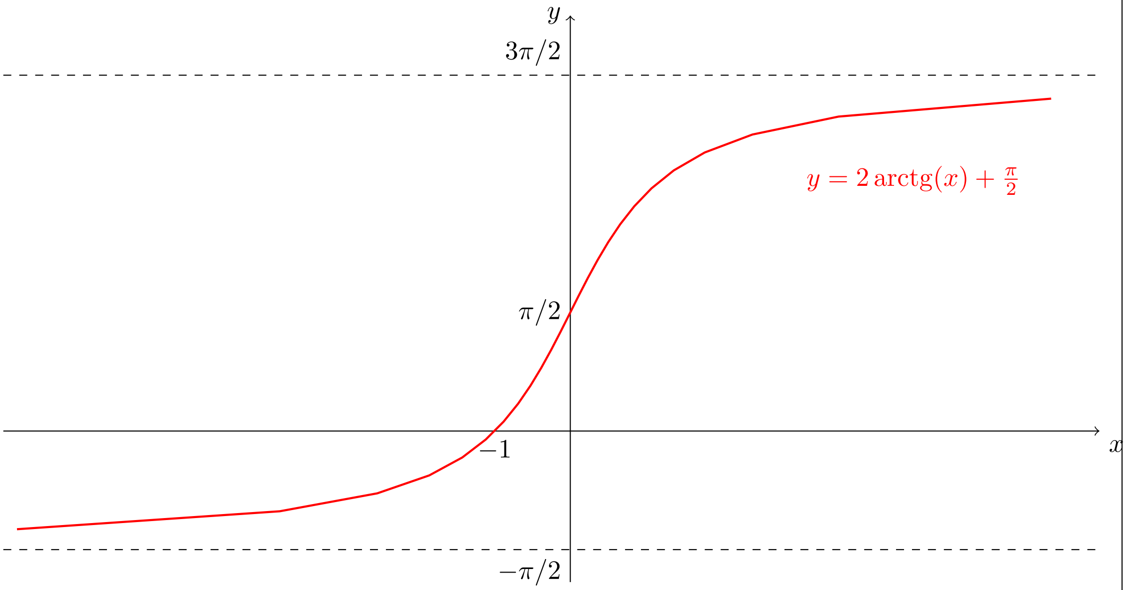
Logo

$$\operatorname{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

(b) O gráfico de $f$ é obtido expandindo verticalmente por um fator 2 e transladando verticalmente $\pi/2$ unidades o gráfico de $\operatorname{arctg}(x)$. Além disso, note que

$$2\operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

ou seja, o gráfico de $f$ tem uma raiz em $x = -1$. Logo, esboçar o seguinte gráfico




(c) Se $\theta = \text{arctg}(x)$, então

$$\text{sen}\left(2\,\text{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta. \tag{1}$$

Além disso, note que

$$x = \text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow x^2 = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+x^2}.$$

Substituindo em (1) temos

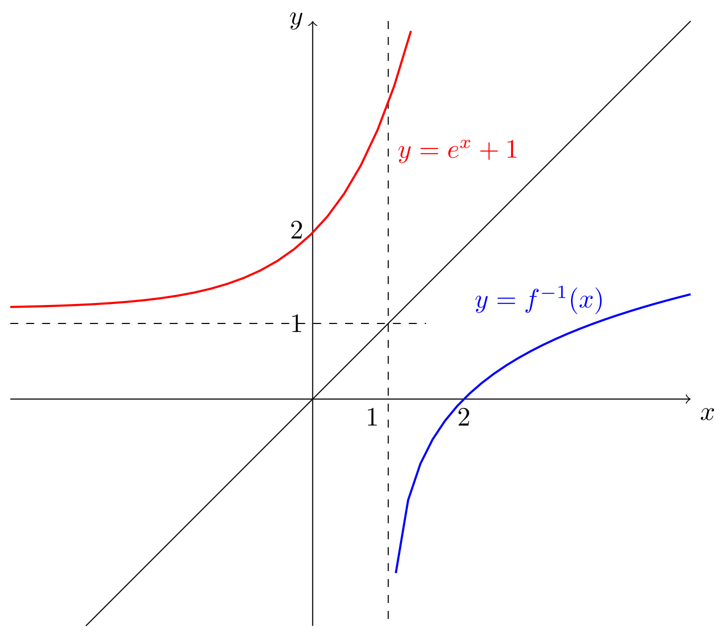
$$\text{sen}\left(2\,\text{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = -1 + 2\cos^2\theta = -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^1}.$$

Portanto, substituindo na equação do problema temos

$$\frac{1-x^2}{1+x^1} = \frac{-3}{x^2+1} \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

4. Considere a função $f(x) = e^x + 1$.
   (a) [1 ponto] Esboce o gráfico de $f$.
   (b) [1 ponto] Esboce o gráfico de $f^{-1}$.

**Solução:**
Sabemos que o gráfico de $f$ é a translação vertical do gráfico de $y = e^x$, e que o gráfico de $f^{-1}$ é a reflexão, pela reta $y = x$, do gráfico de $f$. Portanto temos ambos os gráficos abaixo.




Quando os nazistas levaram os comunistas, eu calei-me, porque, afinal, eu não era comunista. Quando eles prenderam os sociais-democratas, eu calei-me, porque, afinal, eu não era social-democrata. Quando eles levaram os sindicalistas, eu não protestei, porque, afinal, eu não era sindicalista. Quando levaram os judeus, eu não protestei, porque, afinal, eu não era judeu. Quando eles me levaram, não havia mais quem protestasse.

"*E NÃO SOBROU NINGUÉM*", Martin Niemöller.