Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras – PURO

1ª Prova de Cálculo 1 – Turma K1 – 1/2014
18/03/2014

Questão:	1	2	3	4	Total
Pontos:	3	2	3	2	10
Notas:					

Nome:____

Observações: A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação desta prova. Responda cada questão de maneira clara e organizada. Resultados apresentados sem justificativas do raciocínio não serão considerados. Qualquer aluno pego consultando alguma fonte ou colega terá, imediatamente, atribuído grau zero na prova. O mesmo ocorrerá com o aluno que facilitar a consulta do colega. Casos mais graves, envolvendo algum tipo de fraude, deverão ser punidos de forma bem mais rigorosa.

1. Determine o domínio das seguintes funções
   (a) [1 ponto] $f(x) = \sqrt{|3x-2|-3}$
   (b) [1 ponto] $f(x) = \dfrac{1}{|x|-|x+7|}$
   (c) [1 ponto] $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(3^{x-1}-2\right)$

Solução:

(a) Por definição,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ |3x-2|-3 \geq 0\}.$$

Neste caso, note que

$$|3x-2|-3 \geq 0 \Rightarrow |3x-2| \geq 3 \Rightarrow 3x-2 \geq 3 \text{ ou } 3x-2 \leq -3 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{3}.$$

Logo,

$$D(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$$

(b) Por definição,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ |x|-|x-7| \neq 0\}.$$

Note que,

$$|x|-|x-7| = 0 \Rightarrow |x| = |x-7| \Rightarrow x = x-7 \text{ ou } -x = x-7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Logo,

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right).$$

(c) Por definição,

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq 3^{x-1}-2 \leq 1\right\}.$$

Note que,

$$-1 \leq 3^{x-1}-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3^x}{3} \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 3^x \leq 9 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Logo,

$$D(f) = [1, 2].$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

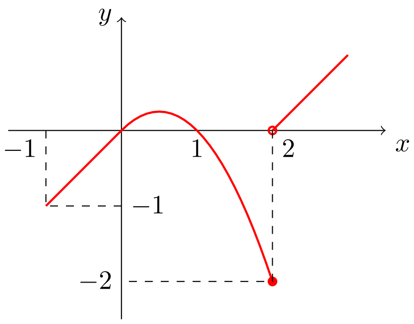
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x - x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$$

   (a) [1 ponto] Esboce seu gráfico.

   (b) [1 ponto] Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

Solução:

(a) O gráfico segue abaixo



(b) Sabemos que a função $g(x) = x - x^2$ passa de crescente para decrescente no vértice da parábola, ou seja, em $x = 1/2$. Assim, pelo gráfico podemos ver que

$$f \text{ é crescente em } \left(-\infty, \tfrac{1}{2}\right] \cup (2, \infty).$$

$$f \text{ é decrescente em } \left[\tfrac{1}{2}, 2\right].$$

3. Seja $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}$.

   (a) [1 ponto] Determine o domínio e a imagem de f.

   (b) [1 ponto] Esboce o gráfico de f.

   (c) [1 ponto] Resolva a equação

$$\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-3}{x^2+1}$$

Solução:

(a) Por definição $D(f) = \mathbb{R}$. Para determinar a imagem observe que se $x \in \mathbb{R}$, então

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\,\mathrm{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}.$$

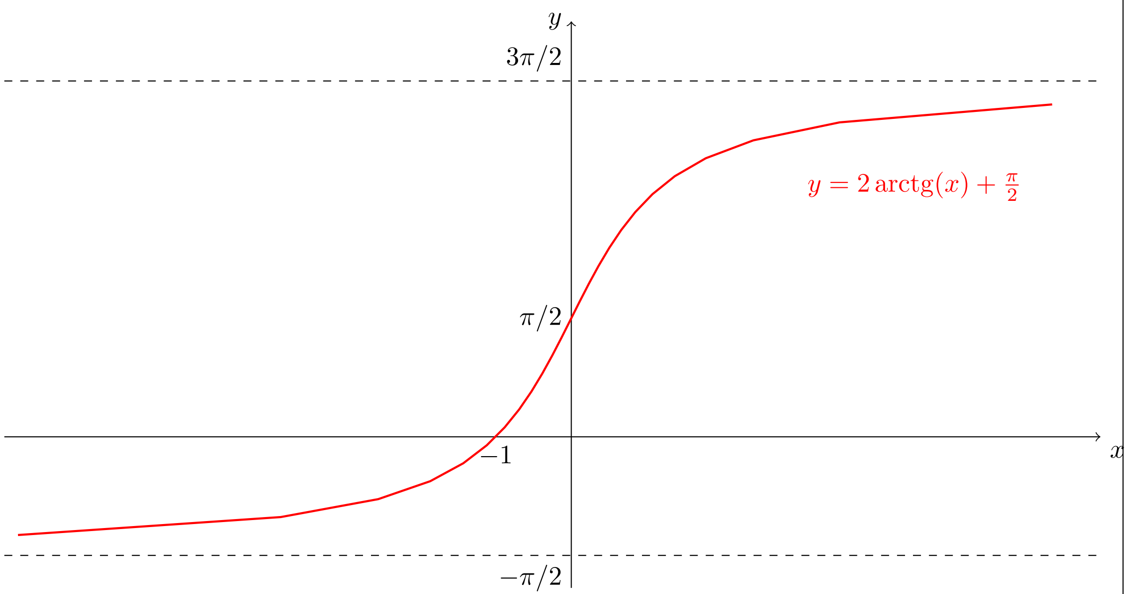
Logo

$$\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

(b) O gráfico de f é obtido expandindo verticalmente por um fator 2 e transladando verticalmente $\pi/2$ unidades o gráfico de $\mathrm{arctg}(x)$. Além disso, note que

$$2\,\mathrm{arctg}(x) + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{arctg}(x) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

ou seja, o gráfico de f tem uma raiz em $x = -1$. Logo, esboçar o seguinte gráfico



(c) Se $\theta = \text{arctg}(x)$, então

$$\text{sen}\left(2\,\text{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta. \tag{1}$$

Além disso, note que

$$x = \text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow x^2 = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{1+x^2}.$$

Substituindo em (1) temos

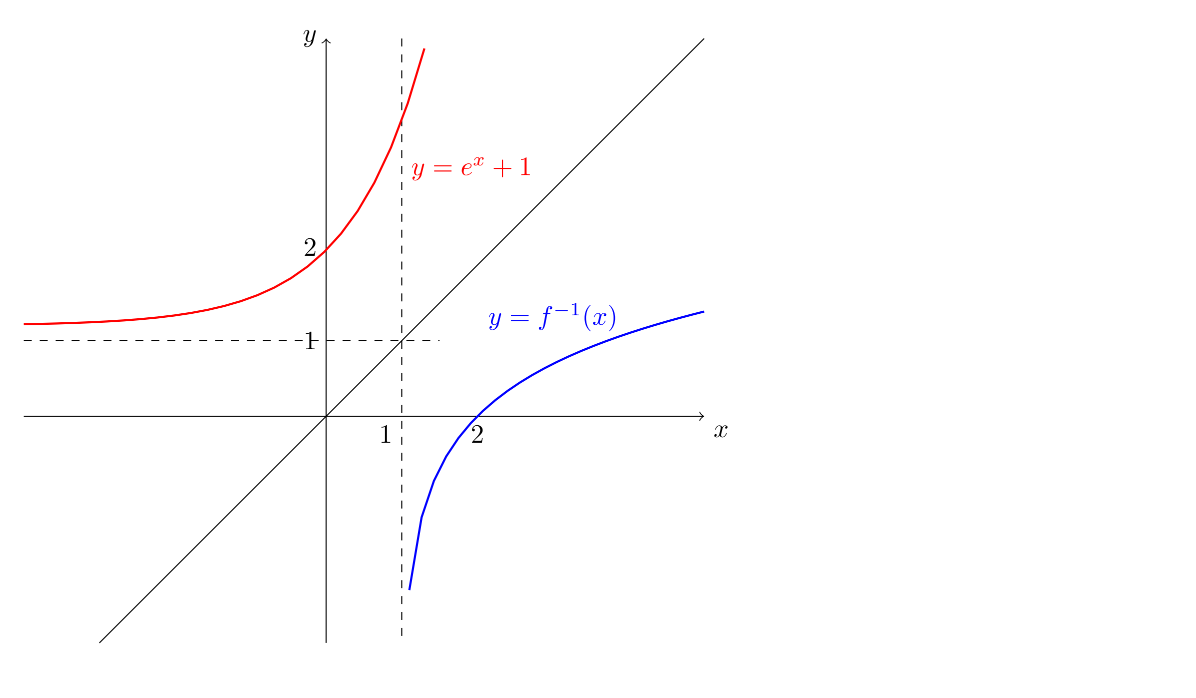
$$\text{sen}\left(2\,\text{arctg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = -1 + 2\cos^2\theta = -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^1}.$$

Portanto, substituindo na equação do problema temos

$$\frac{1-x^2}{1+x^1} = \frac{-3}{x^2+1} \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

4. Considere a função $f(x) = e^x + 1$.
   (a) [1 ponto] Esboce o gráfico de f.
   (b) [1 ponto] Esboce o gráfico de f^{-1}.

Solução:
Sabemos que o gráfico de f é a translação vertical do gráfico de $y = e^x$, e que o gráfico de f^{-1} é a reflexão, pela reta $y = x$, do gráfico de f. Portanto temos ambos os gráficos abaixo.


y
$y = e^x + 1$
2
$y = f^{-1}(x)$
1
1
2
x