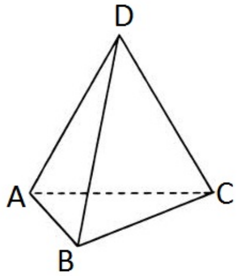
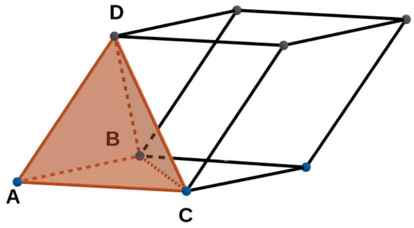
1 Volume do Tetraedro



Um tetraedro é uma pirâmide de base triangular, isto é, um poliedro composto por quatro faces triangulares e quatro vértices. O tetraedro regular é um tetraedro formado por quatro triângulos equiláteros. Sabemos, da geometria básica, que o volume de um tetraedro é dado por

$$V = \frac{1}{3}A_b h,$$

onde A_b é a área de uma das bases triangulares e h é a altura correspondente.



Se A, B, C e D são vértices de um tetraedro, podemos mostrar que seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|,$$

isto é, o volume do tetraedro é igual à sexta parte do volume do paralelepípedo que tem A, B, C e D como vértices adjacentes.

Com efeito, tomemos como base o triângulo ABC, neste caso, $A_b = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$. Podemos ver que a altura relativa à base ABC é a norma da projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{AD}$ sobre o vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, isto é, se $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, então

$$h = \|\operatorname{proj}_{\vec{w}} \overrightarrow{AD}\| = \frac{\left|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{w}\right|}{\|\vec{w}\|} = \frac{\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}.$$

Com isso, temos que

$$V = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|,$$

como queríamos.

2 Exercícios

1. Como seria a fórmula do volume se tomássemos como base o triângulo BCD?
2. Calcule o volume do tetraedro que tem vértices $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (1, 0, 1)$ e $D = (1, 3, -1)$. Calcule a altura relativa ao vértice A.
3. Determine os valores de m para que os pontos $A = (m, 1, 0)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (0, 0, 3)$ e $D = (-1, 0, 0)$ sejam vértices de um tetraedro de volume 6.
4. Dados $A = (-1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 0)$ e $C = (0, 0, 5)$. Encontre uma equação que os pontos $D = (x, y, z)$ devem satisfazer para que volume do tetraedro $ABCD$ seja zero. O que isso significa geometricamente?
5. Sejam $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 3, -4)$, $\vec{w} = (1, 0, \sqrt{3})$ e $\vec{t} = (0, 0, 2)$. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$, sabendo que $\overrightarrow{AB} = \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$, que $\overrightarrow{AC}$ é o vetor oposto do versor de $\vec{w}$ e que $\overrightarrow{BD} = \operatorname{proj}_{\vec{t}}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$.