

1 Projeção Ortogonal

Seja \vec{u} um vetor não-nulo. Qualquer que seja \vec{v} , sempre é possível encontrar vetores \vec{p} e \vec{q} tais que

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q}, \text{ com } \vec{p} \parallel \vec{u} \text{ e } \vec{q} \perp \vec{u}. \quad (1)$$

De fato, como $\vec{p} \parallel \vec{u}$, temos que $\vec{p} = \lambda\vec{u}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos determinar este λ em função de \vec{u} e \vec{v} .

Multiplicando-se a equação (1) por \vec{u} , e observando que $\vec{u} \cdot \vec{q} = 0$, temos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{p} + \vec{u} \cdot \vec{q} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{u}) = \lambda\|\vec{u}\|^2.$$

Como $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos que $\|\vec{u}\| \neq 0$, daí,

$$\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Portanto, temos que

$$\vec{p} = \lambda\vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u}$$

e, conseqüentemente, $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$. É fácil ver que $\vec{q} \perp \vec{u}$.

Ao vetor \vec{p} damos o nome de **projeção ortogonal** de \vec{v} sobre \vec{u} e o denotamos por $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$, isto é,

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} \quad (2)$$

2 Exercícios

1. Determine a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -2, 2)$ sobre $\vec{u} = (3, -1, 1)$.
2. Decomponha $\vec{v} = (-1, -3, 2)$ como a soma de dois vetores \vec{p} e \vec{q} tais que \vec{p} é paralelo e \vec{q} é ortogonal a $\vec{u} = (0, 1, 3)$.
3. Calcule a norma do vetor \vec{p} .
4. Mostre que $\vec{q} \perp \vec{u}$.
5. Dados \vec{u} e \vec{v} não-nulos.
 - a) Prove que $\text{proj}_{\vec{v}} \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2} \vec{v}$, e faça um desenho da situação.
 - b) Obtenha uma expressão para $\text{proj}_{\vec{u}} \text{proj}_{\vec{v}} \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.
 - c) Por analogia, tente generalizar os resultados dos itens (a) e (b) para n projeções sucessivas.
 - d) Na treliça representada na figura abaixo, a barra AB tem 20 metros de comprimento. Calcule a distância entre A e H.

