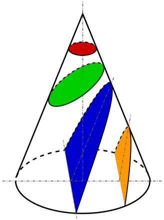
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Sistema de coordenadas cartesianas

Definição 1

Designaremos por $\mathbb{R}^2$ *o conjunto formado pelos pares ordenados* (x, y), *onde* x *e* y *são números reais. O número* x *chama-se a primeira coordenada ou abcissa e o número* y *chama-se a segunda coordenada ou ordenada do par ordenado* (x, y).

Definição 2

Um sistema de coordenadas cartesianas OXY *em um plano é um par de eixos* OX *e* OY, *tomados nesse plano, que são perpendiculares e têm a mesma origem O.*

Um plano qualquer munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1

1. *Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY, represente:*
   - (a) *Os pontos* $P = (1, 0)$, $Q = (2, 1)$ *e* $R = (-3, -2)$.
   - (b) *Os conjuntos* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\}$ *e* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$.
2. *Determine as coordenadas do ponto médio do segmento determinado pelos pontos* $A = (1, 1)$ *e* $B = (7, 3)$.

Exercício 1

Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY, represente o seguinte conjunto

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -1 \text{ e } 0 < x < 2\}$.

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 = 0\}$.

A distância entre dois pontos

Se conhecermos as coordenadas dos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ como podemos determinar a distância entre estes pontos ?

Usando o Teorema de Pitágoras, pode-se mostrar que a distância entre os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ é

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.}$$

Exercício 2

Esboce os pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (2, 4)$ e calcule a distância entre eles.

Exemplo 2

1. *Represente o seguinte conjunto no plano cartesiano*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

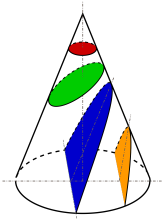
2. *Fixado um ponto* $P_0 = (2, 3)$ *determinar a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento* $\overline{OP_0}$.

Exercício Para Casa 1

1. Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são $A = (-1, 3)$, $B = (1, 0)$ e $C = (5, 0)$.
2. Fixado um ponto $P_0 = (-2, 5)$ determinar a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento $\overline{OP_0}$. Repita o raciocínio para um ponto arbitrário $P_0 = (x_0, y_0)$.
3. Determine uma equação para os pontos do plano equidistantes de $P = (1, -2)$ e $Q = (3, 4)$.
4. Ler o texto *conjuntos*[a] na pasta do curso e fazer os exercícios 6 e 8.

[a] Texto retirado do livro [**?**]

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Definição 1

O ponto médio de um segmento de reta é o ponto que divide este segmento ao meio.

Exemplo 1

Determine a coordenada do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ sobre um eixo OX, sabendo-se que as coordenadas de A e B são respectivamente:

1. $x = 1$ e $x = 5$.
2. $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 2

Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY, determine as coordenadas do ponto médio do segmento determinado pelos pontos

1. $A = (1, 1)$ e $B = (7, 3)$.
2. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$.

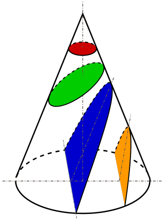
Exercício 1

Da Geometria Plana, sabemos que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, as suas diagonais cortam-se mutuamente ao meio, ou seja, se suas diagonais têm o mesmo ponto médio.

Em plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY, marque os pontos $O = (0, 0), A = (1, 2), B = (2, 1)$ e $C = (3, 3)$ e diga se o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

A distância entre dois pontos

Usando o Teorema de Pitágoras, pode-se mostrar que a distância entre os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ em um plano é

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.}$$

Exemplo 1

1. *Calcule a distância entre os pontos* $P = (1, 3)$ *e* $Q = (2, 4)$.
2. *Determine uma equação para os pontos do plano equidistantes de* $P = (1, -2)$ *e* $Q = (3, 4)$.

Exercício 1

1. Determine uma equação para os pontos do plano equidistantes de $P = (1, 1)$ e $Q = (4, 2)$.
2. Determine a distância entre o ponto $A = (1, 0)$ e o ponto médio do segmento determinado por $B = (-1, 3)$ e $C = (5, 1)$.

Resposta

1. $3x + y = 9$
2. $M = (2, 2)$ e $d(A, M) = \sqrt{5}$.

Exemplo 2

1. *Determine uma equação para os pontos do plano que estão a uma distância 1 da origem.*
2. *Fixado um ponto* $P_0 = (2, 3)$ *determinar uma equação para a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento* $\overline{OP_0}$.

Exercício 2

1. Determine uma equação para os pontos do plano que estão a uma distância 2 da origem.
2. Fixado um ponto $P_0 = (-2, 5)$ determinar a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento $\overline{OP_0}$. Repita o raciocínio para um ponto arbitrário $P_0 = (x_0, y_0)$.

Resposta

1. $x^2 + y^2 = 4.$
2. $-2x + 5y = 0$ e $x_0 x + y_0 y = 0.$

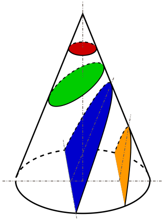
Exercício Para Casa 1

1. Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são $A = (-1, 3)$, $B = (1, 0)$ e $C = (5, 0)$.
2. Fixado um ponto $P_0 = (-2, 5)$ determinar a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento $\overline{OP_0}$. Repita o raciocínio para um ponto arbitrário $P_0 = (x_0, y_0)$.
3. Determine uma equação para os pontos do plano equidistantes de $P = (1, -2)$ e $Q = (3, 4)$.
4. Ler o texto *conjuntos*[a] na pasta do curso e fazer os exercícios 6 e 8.

[a] Texto retirado do livro [**?**]

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Grandezas Escalares

As grandezas escalres são conceitos que podem ser representados por números reais. Exemplos simples de grandezas escalares são: distância entre dois pontos, áreas, volumes, massa, tempo, densidade, temperatura e etc.

Grandezas Vetoriais

As grandezas vetoriais são conceitos que, além de um escalar para representar a intensidade, precisam também de direção e sentido. Exemplos de grandezas vetoriais são os conceitos de velocidade de uma partícula e força.

Definição 1 (Segmento Orientado)

Dados dois pontos A e B designamos por AB o segmento de reta orientado percorrido de A para B. O ponto A é dito origem e o ponto B é dito extremidade.

Definição 2 (Segmentos Equipolentes)

Dois segmentos orientados são ditos equipolentes quando têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

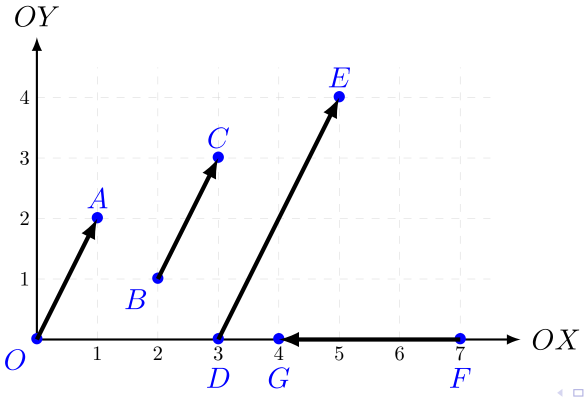
Se os segmentos orientados AB e CD são equipolentes, escrevemos $AB \sim CD$.

Um ponto é chamado um segmento nulo. Os segmentos nulos têm comprimento zero e não têm direção nem sentido. Todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.

Exemplo 1

Considere os pontos $O = (0,0)$, $A = (1,2)$, $B = (2,1)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$, $E = (5,4)$, $F = (7,0)$ *e* $G = (4,0)$.

a. *Desenhe no plano os segmentos orientados* OA, BC, DE *e* FG.
b. *Quais desses segmentos são equipolentes?*



Definição 3 (Vetor)

Ao conjunto de todos os segmentos orientados equipolente damos o nome de vetor*. Isto quer dizer que segmentos orientados com mesmo comprimento, direção e sentido são* representantes *de um mesmo vetor. Se AB é um segmento orientado, o vetor que ele representa é designado por $\overrightarrow{AB}$. Os vetores são também escritos usando letras minúsculas com uma flecha, como $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e etc. Ao comprimento de um vetor $\overrightarrow{v}$, damos o nome de* norma *e denotamos por $\|\overrightarrow{v}\|$.*

Formalmente, um vetor *é uma* classe de equivalência *de todos os segmentos orientados que são equipolentes.*

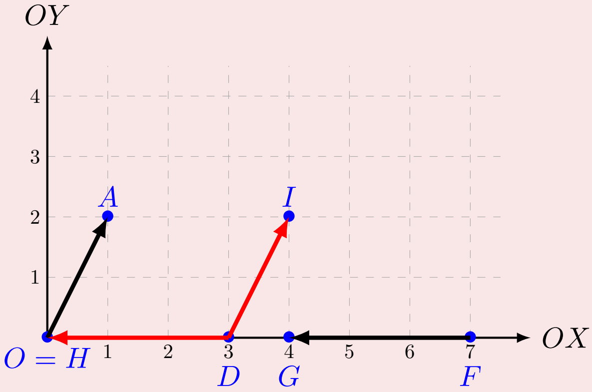
Exemplo 2

Com essa notação, do exemplo anterior concluímos que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

Exercício 1

Considere os pontos do Exemplo 1. Determine as coordenadas dos pontos H e I tais que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DH}$ e $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DI}$.

Resposta



Coordenadas de Vetores

Proposição 4

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *se, e somente se,* $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ *possuem o mesmo ponto médio.*

Proposição 5

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ *e* $D = (d_1, d_2)$ *pontos no plano cartesiano, então:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

Definição 6 (Coordenadas de um Vetor)

Sejam $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$ *pontos do plano. Dizemos que* $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ *são as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{AB}$ *, e escrevemos:*

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Exemplo 3

Sejam $A = (1, 0)$ *e* $B = (-1, 1)$ *pontos do plano. Determinemos o ponto* $P = (x, y)$*, tal que* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$*.*

Observação 7

As coordenadas de um ponto qualquer P *do plano e do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ *são as mesmas.*

Exercício 2

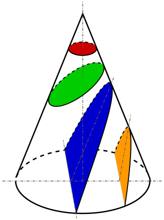
1. Sejam $A = (1,1), B = (2,2), C = (-1,0)$ e $D = (0,1)$. Verifique se $\vec{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Sejam os pontos $A = (0,1)$, $B = (1, -\frac{1}{2})$ e $C = (1,0)$. Determine as coordenadas do ponto D tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Resposta

1. Como $\overrightarrow{AB} = (1,1)$ e $\overrightarrow{CD} = (1,1)$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Seja $D = (x,y)$, como $\overrightarrow{AB} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$, então $\overrightarrow{CD} = (x-1, y) = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Logo, $D = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Suponha que uma partícula se mova de um ponto A para um ponto B, assim seu vetor deslocamento é $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Depois, a partícula muda de direção e se move de B para C, com o vetor deslocamento $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O efeito combinado desses deslocamentos é dado pelo vetor $\overrightarrow{AC}$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1 (Soma)

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano. A soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é um vetor construído da seguinte forma: Toma-se A um ponto qualquer do plano, AB o representante de $\overrightarrow{u}$ e BC o representante do vetor $\overrightarrow{v}$, então a soma será o vetor $\overrightarrow{AC}$. Neste caso, denotamos

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Proposição 2

S'e $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, *então* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

Exemplo 1

Sejam $A = (-1, 0)$, $B = (2, -1)$ *e* $C = (1, 2)$. *Determine* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Propriedades da Soma de Vetores

1. Comutatividade: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. Vetor nulo: O vetor nulo, denotado por $\overrightarrow{0}$, é o vetor tal que para todo vetor $\overrightarrow{u}$
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}.$$
3. Simétrico: Para todo vetor $\overrightarrow{u}$ existe um vetor, denotado por $-\overrightarrow{u}$ e chamado simétrico, tal que
$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$
4. Associatividade: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

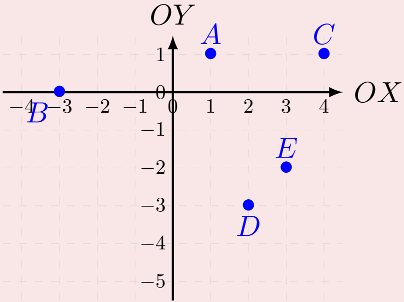
Exercício 1

Localize os pontos $A = (1,1)$, $B = (-3,0)$, $C = (4,1)$, $D = (2,-3)$ e $E = (3,-2)$ no plano cartesiano e determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ abaixo e esboce um de seus representantes.

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$

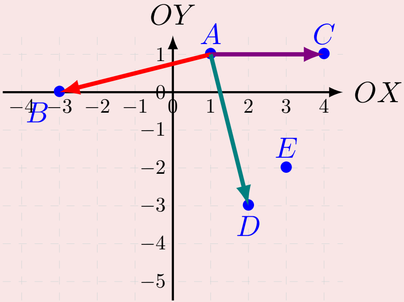
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4,-1) + (3,0) + (1,-4) = (0,-5)$



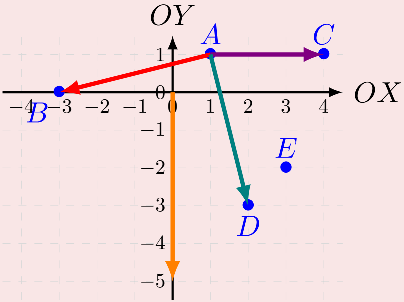
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4,-1)+(3,0)+(1,-4) = (0,-5)$



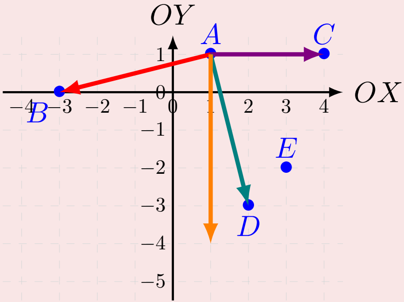
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4,-1) + (3,0) + (1,-4) = (0,-5)$



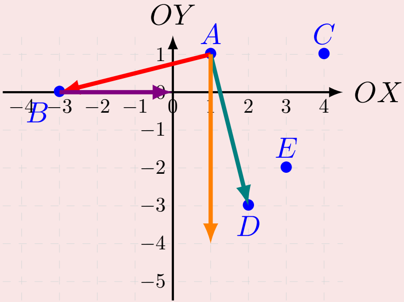
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4,-1) + (3,0) + (1,-4) = (0,-5)$



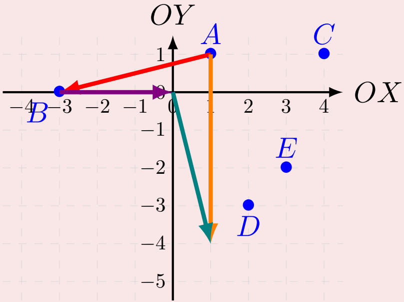
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4, -1) + (3, 0) + (1, -4) = (0, -5)$



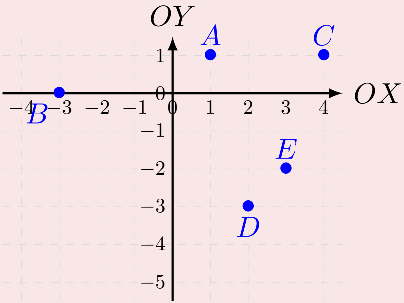
Resposta

1. $\overrightarrow{u} = (-4,-1) + (3,0) + (1,-4) = (0,-5)$



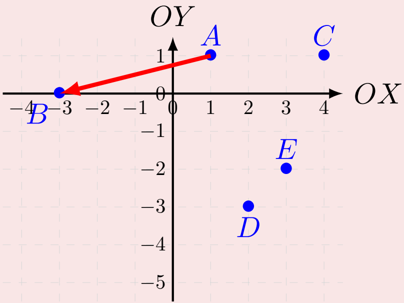
Resposta

2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



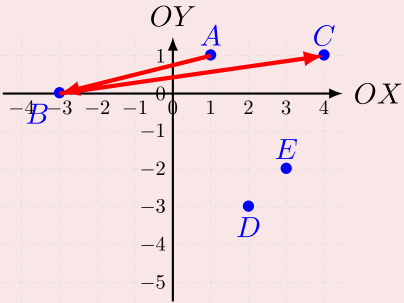
Resposta

❷ $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



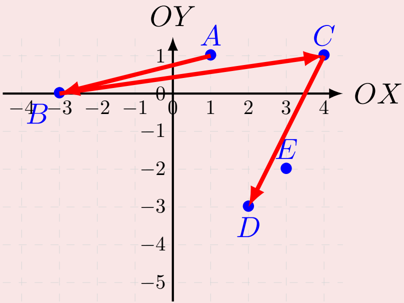
Resposta

2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



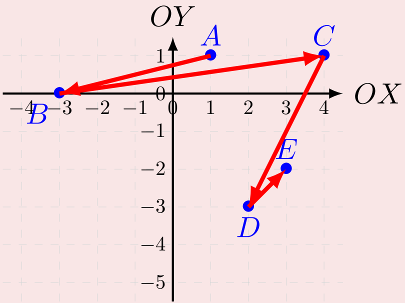
Resposta

2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



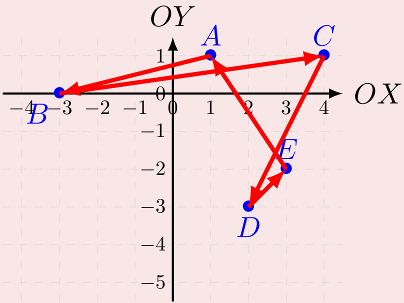
Resposta

2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

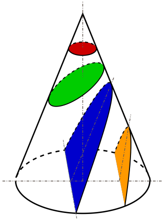


Resposta

2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



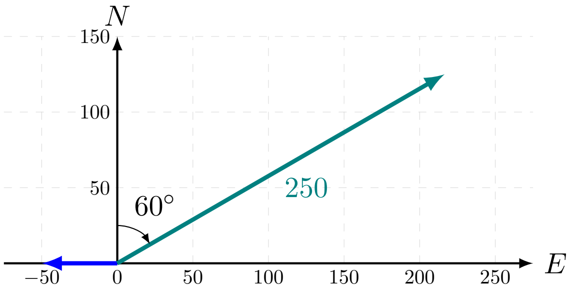
Prof. Reginaldo Demarque

Regra do Paralelogramo

Sejam A, B, C pontos não-colineares do plano. Então $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, onde o ponto D faz do quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo. O vetor $\overrightarrow{AD}$ é as vezes chamado de vetor resultante.

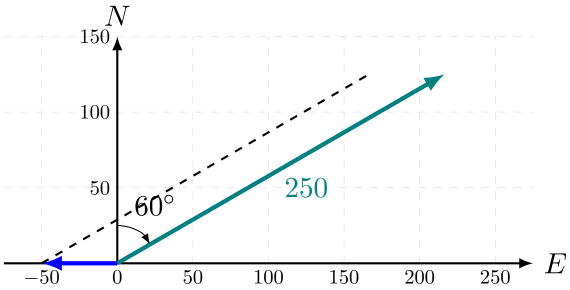
Exemplo 1

A velocidade é uma grandeza vetorial, portanto podem ser representadas por vetores. A norma do vetor velocidade é chamada de velocidade escalar. Suponha que esteja ventando na direção oeste a uma velocidade de 50 km/h. Um piloto está virando seu avião a 60° *graus a leste da direção norte, a uma velocidade de 250 km/h, como na figura abaixo. Esboce o vetor resultante dos vetores velocidades do avião e do vento que fornece a trajetória do avião.*



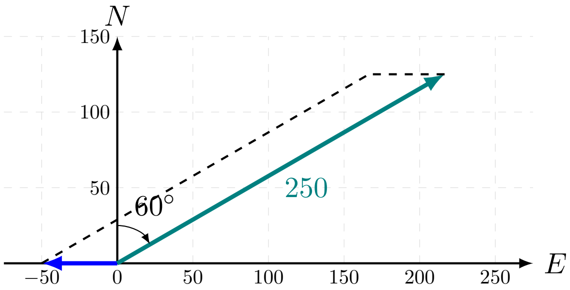
Exemplo 1

A velocidade é uma grandeza vetorial, portanto podem ser representadas por vetores. A norma do vetor velocidade é chamada de velocidade escalar. Suponha que esteja ventando na direção oeste a uma velocidade de 50 km/h. Um piloto está virando seu avião a 60° graus a leste da direção norte, a uma velocidade de 250 km/h, como na figura abaixo. Esboce o vetor resultante dos vetores velocidades do avião e do vento que fornece a trajetória do avião.



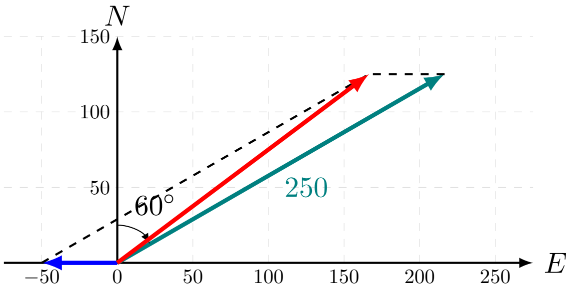
Exemplo 1

A velocidade é uma grandeza vetorial, portanto podem ser representadas por vetores. A norma do vetor velocidade é chamada de velocidade escalar. Suponha que esteja ventando na direção oeste a uma velocidade de 50 km/h. Um piloto está virando seu avião a 60° *graus a leste da direção norte, a uma velocidade de 250 km/h, como na figura abaixo. Esboce o vetor resultante dos vetores velocidades do avião e do vento que fornece a trajetória do avião.*



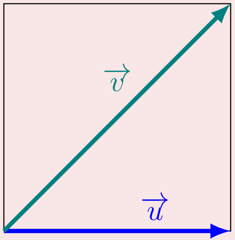
Exemplo 1

A velocidade é uma grandeza vetorial, portanto podem ser representadas por vetores. A norma do vetor velocidade é chamada de velocidade escalar. Suponha que esteja ventando na direção oeste a uma velocidade de 50 km/h. Um piloto está virando seu avião a $60°$ *graus a leste da direção norte, a uma velocidade de 250 km/h, como na figura abaixo. Esboce o vetor resultante dos vetores velocidades do avião e do vento que fornece a trajetória do avião.*

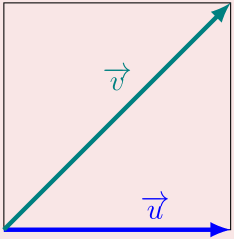


Exercício 1

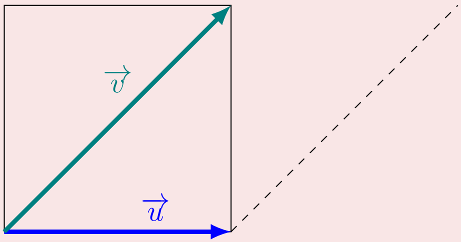
Considere os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ formados por um lado e a diagonal de um quadrado de lado 5 cm, como na figura abaixo. Use a regra do paralelogramo para determinar o vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



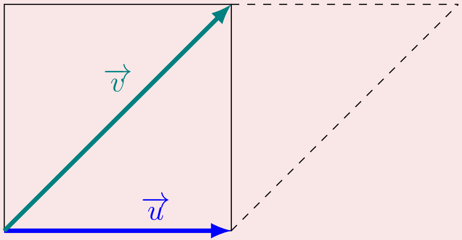
Resposta



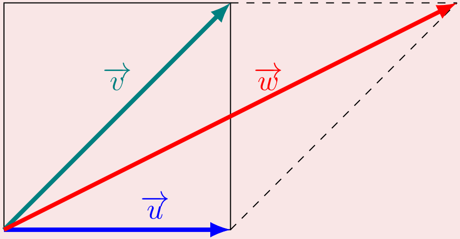
Resposta



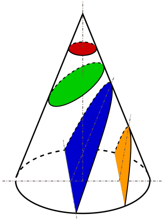
Resposta



Resposta



Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Definição 1 (Multiplicação de vetores por escalares)

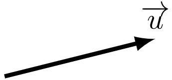
Sejam $\overrightarrow{u}$ um vetor e λ um número real. Definimos o produto de λ por $\overrightarrow{u}$ com sendo o vetor $\lambda\overrightarrow{u}$ caracterizado por:

- *Tem mesma direção do vetor $\overrightarrow{u}$;*
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$;
- $\lambda\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}$ *tem o mesmo sentido se* $\lambda > 0$, *sentidos opostos se* $\lambda < 0$.

Definição 1 (Multiplicação de vetores por escalares)

Sejam $\overrightarrow{u}$ um vetor e λ um número real. Definimos o produto de λ por $\overrightarrow{u}$ com sendo o vetor $\lambda\overrightarrow{u}$ caracterizado por:

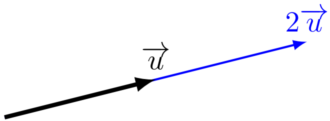
- *Tem mesma direção do vetor $\overrightarrow{u}$;*
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$;
- $\lambda\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}$ *tem o mesmo sentido se* $\lambda > 0$, *sentidos opostos se* $\lambda < 0$.



Definição 1 (Multiplicação de vetores por escalares)

Sejam $\overrightarrow{u}$ um vetor e λ um número real. Definimos o produto de λ por $\overrightarrow{u}$ com sendo o vetor $\lambda\overrightarrow{u}$ caracterizado por:

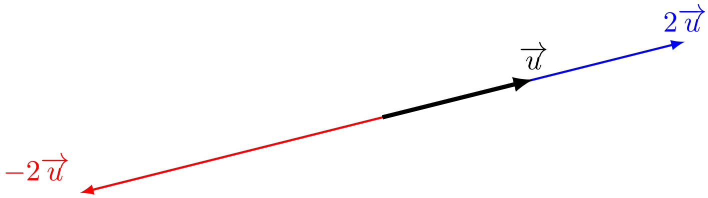
- *Tem mesma direção do vetor $\overrightarrow{u}$;*
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$;
- *$\lambda\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ tem o mesmo sentido se $\lambda > 0$, sentidos opostos se $\lambda < 0$.*



Definição 1 (Multiplicação de vetores por escalares)

Sejam $\overrightarrow{u}$ *um vetor e* λ *um número real. Definimos o* *produto de* λ *por* $\overrightarrow{u}$ *com sendo o vetor* $\lambda\overrightarrow{u}$ *caracterizado por:*

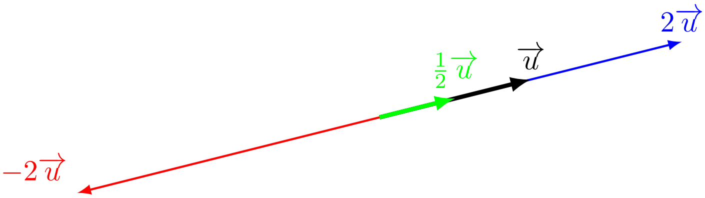
- *Tem mesma direção do vetor* $\overrightarrow{u}$*;*
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$*;*
- $\lambda\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}$ *tem o mesmo sentido se* $\lambda > 0$*, sentidos opostos se* $\lambda < 0$*.*



Definição 1 (Multiplicação de vetores por escalares)

Sejam $\overrightarrow{u}$ *um vetor e* λ *um número real. Definimos o* *produto de* λ *por* $\overrightarrow{u}$ *com sendo o vetor* $\lambda\overrightarrow{u}$ *caracterizado por:*

- *Tem mesma direção do vetor* $\overrightarrow{u}$*;*
- $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$;
- $\lambda\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}$ *tem o mesmo sentido se* $\lambda > 0$*, sentidos opostos se* $\lambda < 0$*.*



Proposição 2

Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *então* $\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.

Exemplo 1

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (3, 1)$, *determine* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Propriedades da multiplicação de vetores por escalares

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Associatividade: $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$;
2. Distributividade:
$$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$$
$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u};$$
3. Elemento neutro: O número 1 é o elemento neutro da multiplicação por escalar, ou seja,
$$1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.$$

Definição 3 (Vetor unitário)

Um vetor com norma 1 é dito vetor unitário ou versor.

Exemplo 2

Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, determinar um vetor unitário $\overrightarrow{v}$ com mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{u}$.

Exercício 1

1. Dados $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$, $E = (3, -2)$ e $F = (-4, -3)$ pontos no plano cartesiano, efetue os seguintes cálculos:
   a. $2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$
   b. $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{ED} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DC})$

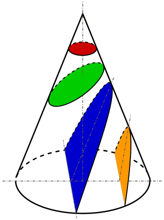
Resposta

1. Dados $A = (1,1)$, $B = (-3,0)$, $C = (4,1)$, $D = (2,-3)$, $E = (3,-2)$ e $F = (-4,-3)$ pontos no plano cartesiano, efetue os seguintes cálculos:

   a.
$$
\begin{aligned}
& 2\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}\right) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD} \\
&= 2\Big((7,1) - (1,3)\Big) + 3(-7,-1) - 2(1,-4) \\
&= (-11,1)
\end{aligned}
$$

   b.
$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{ED} - \left(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DC}\right) \\
&= (-4,-1) - \Big((3,0) + 2(-2,-4)\Big) + (-1,-1) - \Big((-6,2) - (2,4)\Big) \\
&= (4,8)
\end{aligned}
$$

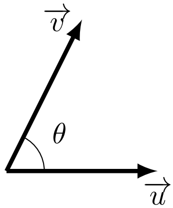
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana

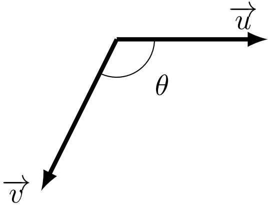


Prof. Reginaldo Demarque

Definição 1 (ângulo entre vetores)

Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ definimos o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ o menor ângulo formado por seus respectivos representantes com mesma origem.



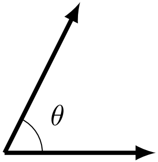


Definição 2 (Produto interno ou Produto Escalar)

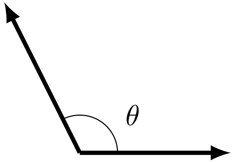
O produto interno ou escalar entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o número real

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta,$$

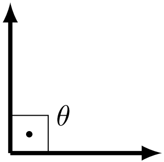
onde θ é o ângulo entre eles.



$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0$



$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0$



$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Proposição 3

Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *são vetores no plano, então*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Exemplo 1

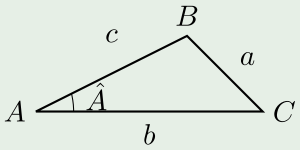
1. *Encontre o produto interno entre* $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (3, 4)$. *Em seguida determine o ângulo entre eles.*
2. *Determinar um vetor* $\overrightarrow{u}$ *que seja ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{v} = (2, 3)$.

Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b e c, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A},$$

onde $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao lado a.



Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e para qualquer número real λ, valem as propriedades:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$;
2. $\lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v})$;
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$;
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
5. $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwartz)

Exercício 1

1. Ache o ângulo entre os vetores

   a. $\overrightarrow{u} = (1,0)$ e $\overrightarrow{v} = (\sqrt{3},1)$

   b. $\overrightarrow{u} = (2,-3)$ e $\overrightarrow{v} = (1,1)$

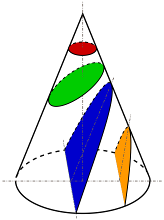
2. Encontre os vetores com norma $2\sqrt{13}$ e perpendiculares a $\overrightarrow{v} = (2,3)$. Qual forma ângulo agudo com $(1,0)$?
3. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores unitários. Mostre que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ são ortogonais.
4. Use a desigualdade de Cauchy-Schwartz para mostrar que

$$|xy + ab| \leq \sqrt{x^2 + a^2}\sqrt{y^2 + b^2},\ \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}.$$

Resposta

1. Ache o ângulo entre os vetores
   - a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sqrt{3}, \ \|\overrightarrow{u}\| = 1, \ \|\overrightarrow{v}\| = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ.$
   - b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -1, \ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{23}, \ \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right) \approx 101,31^\circ$
2. Seja $\overrightarrow{u} = (x, y)$. Então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ e $\|\overrightarrow{u}\| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \overrightarrow{u} = (-6, 4)$ ou $\overrightarrow{u} = (6, -4)$. Como $(6, -4) \cdot (1, 0) = 6 > 0$, então $\overrightarrow{u} = (6, -4)$ forma o ângulo agudo com $(1, 0)$.
3. $$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$
4. Dados $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ defina $\overrightarrow{u} = (x, a)$ e $\overrightarrow{v} = (y, b)$. Daí,
   $$|xy + ab| = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + a^2}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

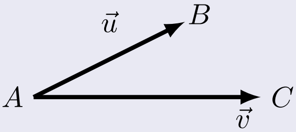
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana

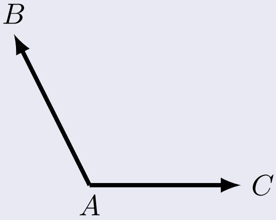


Prof. Reginaldo Demarque

Definição 1

A projeção ortogonal de um vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre um vetor não nulo* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$*, denotado por* $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$*, determinado ao se baixar uma perpendicular de* B *até a reta determinada por* AC*.*

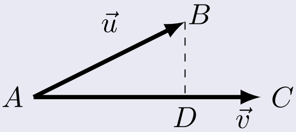


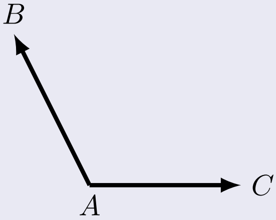


Projeção Ortogonal

Definição 1

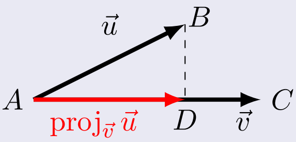
A ***projeção ortogonal*** *de um vetor* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre um vetor não nulo* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$*, denotado por* $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$*, determinado ao se baixar uma perpendicular de* B *até a reta determinada por* AC*.*

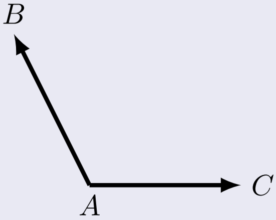




Definição 1

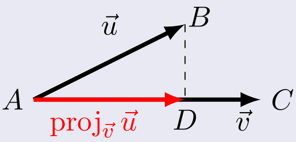
A *projeção ortogonal* *de um vetor* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre um vetor não nulo* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$*, denotado por* $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$*, determinado ao se baixar uma perpendicular de* B *até a reta determinada por* AC.

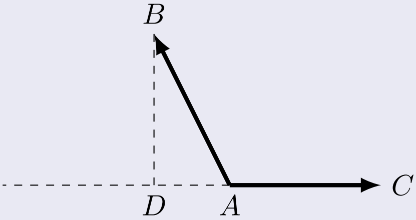




Definição 1

A projeção ortogonal de um vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre um vetor não nulo* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$*, denotado por* $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$*, determinado ao se baixar uma perpendicular de* B *até a reta determinada por* AC*.*

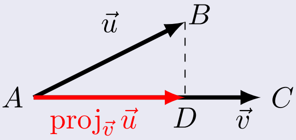


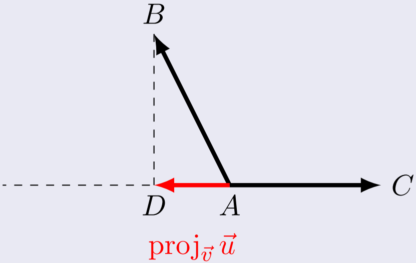


Projeção Ortogonal

Definição 1

A projeção ortogonal de um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *sobre um vetor não nulo* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$, *denotado por* $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, *determinado ao se baixar uma perpendicular de* B *até a reta determinada por* AC.





Proposição 2

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano, com $\overrightarrow{v}$ não nulo. A projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} := \left(\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\right)\overrightarrow{v}$$

Observação 3

Note que se $\overrightarrow{v}$ é unitário, então

$$\text{proj}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} := (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{v} = (\|\overrightarrow{u}\|\cos\theta)\overrightarrow{v},$$

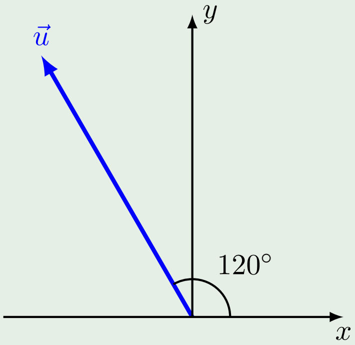
onde θ é o ângulo entre os vetores.

Exemplo 1

(a) Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{u} = (1,1)$ sobre o vetor $\overrightarrow{v} = (-2,3)$ e esboce essa situação.

(b) Determine $\text{proj}_{\vec{i}}\vec{u}$, onde $\overrightarrow{i} = (1,0)$, $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ e $\overrightarrow{u}$ faz um ângulo de $30°$ com $\overrightarrow{i}$.

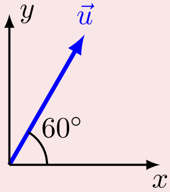
(c) Seja $\vec{u}$ um vetor de comprimento 4 e que faz um ângulo de $120°$ com o eixo x, como na figura abaixo. Decomponha $\vec{u}$ como a soma de vetores paralelos aos eixos coordenados.



Exercício 1

(a) Determine a projeção do vetor $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ sobre o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 3)$ e esboce essa situação.

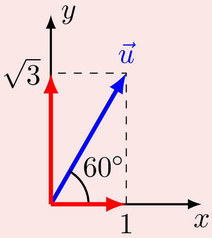
(b) Seja $\vec{u}$ um vetor de comprimento 2 e que faz um ângulo de 60° com o eixo x, como na figura abaixo. Decomponha $\vec{u}$ como a soma de vetores paralelos aos eixos coordenados.



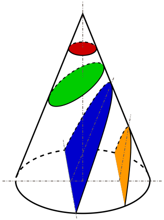
Resposta

a) $\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{(-1,2)\cdot(1,3)}{10}(1,3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$

b) $\vec{u} = \text{proj}_{\vec{i}}\,\vec{u} + \text{proj}_{\vec{j}}\,\vec{u} = (\|\vec{u}\|\cos 60°)\vec{i} + (\|\vec{u}\|\cos 30°)\vec{j} = \vec{i} + \sqrt{3}\;\vec{j} = (1, \sqrt{3}).$



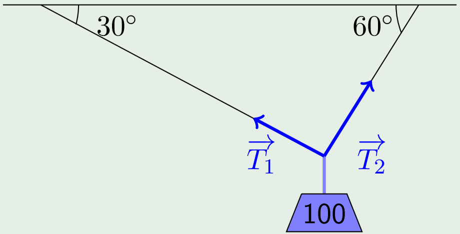
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

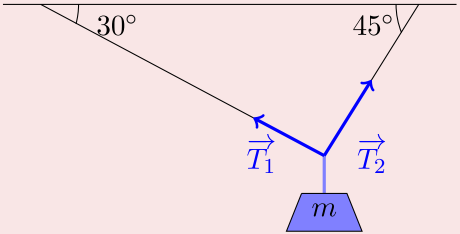
Exemplo 1 (Stewart, Vol. 2, 6^a ed., seção 12.2)

Uma carga com massa de 100 kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na figura abaixo. Determine os módulos das tensões $\overrightarrow{T_1}$ e $\overrightarrow{T_2}$ em ambos os fios.



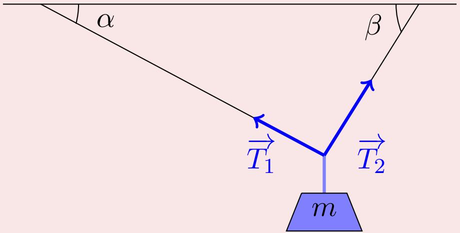
Exercício 1

Uma carga com massa de m kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na figura abaixo. Sabendo-se que o módulo da tensão $\overrightarrow{T_2} = 100N$, encontre o valor da massa m.



Exercício 2

Uma carga com massa de m kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na figura abaixo. Determine os módulos das tensões $\overrightarrow{T_1}$ e $\overrightarrow{T_2}$ em ambos os fios em função de m, α, β e da aceleração da gravidade g.



Dica: Lembre-se que $\cos(90 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$.

Resposta do Exercício 1

Fazendo $T_1 = \|\overrightarrow{T_1}\|$, $T_2 = \|\overrightarrow{T_2}\|$ e denotando por g a aceleração da gravidade, temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_1} = -T_1 \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + T_1 \frac{1}{2}\vec{j} \\ \overrightarrow{T_2} = T_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \\ \overrightarrow{F} = -mg\vec{j} \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ e $T_2 = 100$, temos que

$$T_1 = T_2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ e } m = \frac{T_2}{g}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 11,38\ kg,$$

onde estamos considerando $g \approx 9,8m/s^2$.

Resposta do Exercício 2

Fazendo $T_1 = \|\overrightarrow{T_1}\|$, $T_2 = \|\overrightarrow{T_2}\|$ e denotando por g a aceleração da gravidade, temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_1} = -T_1 \cos\alpha \ \vec{i} + T_1 \operatorname{sen}\alpha \ \vec{j} \\ \overrightarrow{T_2} = T_2 \cos\beta \ \vec{i} + T_2 \operatorname{sen}\beta \vec{j} \\ \overrightarrow{F} = -mg \ \vec{j} \end{cases}$$

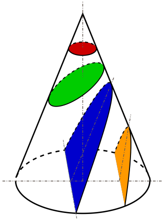
Como $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, temos que

$$T_1 = T_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \text{ e } T_2(\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta) = mg.$$

Logo,

$$T_2 = \frac{mg}{\cos\beta \tan\alpha + \operatorname{sen}\beta} \text{ e } T_1 = T_2 \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana

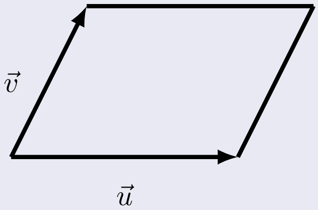


Prof. Reginaldo Demarque

Área de um Paralelogramo

A área de um paralelogramo cujas arestas são dadas por representantes dos vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ é:

$$\left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$$



Exemplo 1

(a) Determine a área do paralelogramo $ABDC$ sabendo-se que $A = (0, -1)$, $B = (3, 0)$ e $C = (1, 2)$.

(b) Determine o ponto C sobre o eixo dos x que forma com $A = (2, 3)$ e $B = (3, -3)$ um triângulo de área 3.

Exercício 1

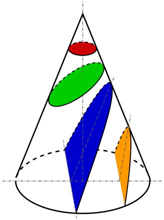
1. Determine a área do paralelogramo $ABDC$ sabendo-se que $A = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ e $C = (4, 2)$.
2. Determine o ponto C sobre o eixo dos y que forma com $A = (1, 2)$ e $B = (2, 3)$ um triângulo de área 1.

Resposta

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (5, 1)$ e $\mathcal{A} = 13$
2. Fazendo $C = (0, y)$ temos que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, y - 2)$. Logo $C = (0, 3)$ ou $C = (0, -1)$.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Equação paramétrica da reta

Definição 1

Dizemos que $\overrightarrow{u}$ *é* *múltiplo* *de* $\overrightarrow{v}$ *quando existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

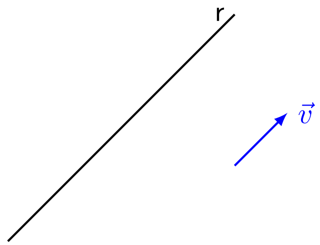
Observação 2

Note que desta definição podemos concluir que:

1. *O vetor nulo* $\overrightarrow{0}$ *é múltiplo de qualquer vetor. Contudo nenhum vetor não nulo é múltiplo do vetor nulo.*
2. *Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não são nulos, então* $\overrightarrow{u}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{v}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{u}$.

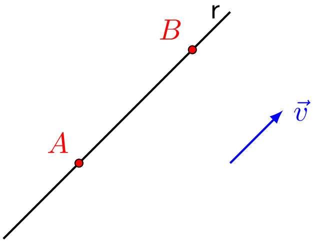
Definição 3

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é paralelo a uma reta* r*, e escrevemos* $\overrightarrow{v} \parallel r$*, se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$*, o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$*.*



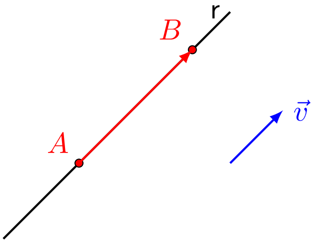
Definição 3

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ é paralelo a uma reta r, e escrevemos $\overrightarrow{v} \parallel r$, se, para quaisquer pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

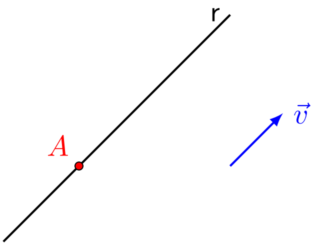


Definição 3

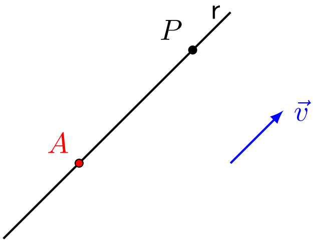
Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é paralelo a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \parallel r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$.



Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor paralelo a esta reta.

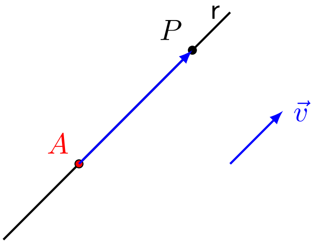


Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto $P = (x, y)$ desta reta r.

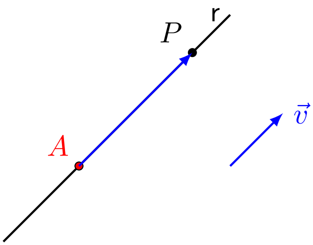
Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto $P = (x, y)$ desta reta r. Existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto $P = (x, y)$ desta reta r. Existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor de r.

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas temos que

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a, b)$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas temos que

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas temos que

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0 + ta, y_0 + tb), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas temos que

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) \Rightarrow (x, y) = (x_0 + ta, y_0 + tb),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Com isso,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de equações paramétricas da reta r.

Exemplo 1

a. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$.
b. Determine o ponto P, pertencente à reta do item anterior, que forma com os pontos $Q = (1, 0)$ e $R = (3, 1)$ um triângulo de área 3

Exercício 1

(a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (5, 2)$.

(b) Determine o ponto P, pertencente à reta do item anterior, que forma com os pontos $Q = (1, 0)$ e $R = (4, 1)$ um triângulo de área 2

Resposta

a $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3, -1)$, daí,

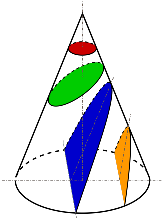
$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b Do item anterior temos que $P = (2 + 3t, 3 - t)$. Fazendo $\vec{u} = \overrightarrow{QP} = (2 + 3t, 3 - t)$, $\overrightarrow{QR} = (3, 1)$ e aplicando a fórmula de área de um triângulo, temos que

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 + 3t & 3 - t \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2 \Rightarrow |6t - 8| = 4 \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = \frac{2}{3}.$$

Logo, $P = (8, 1)$ ou $P = \left(4, \frac{7}{3}\right)$.

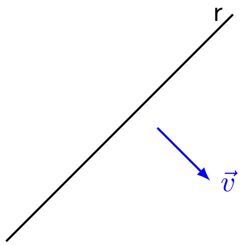
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

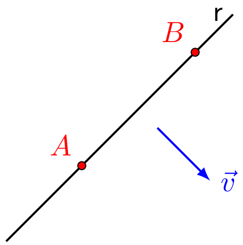
Definição 1

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é ortogonal a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \perp r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{v}$.



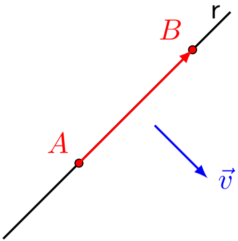
Definição 1

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é ortogonal a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \perp r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{v}$.

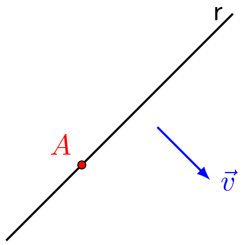


Definição 1

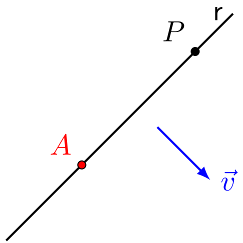
Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é ortogonal a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \perp r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{v}$.



Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.

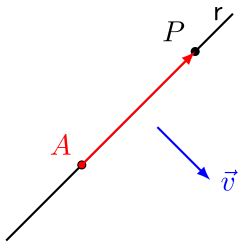


Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.



Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ desta reta r.

Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.



Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ desta reta r. Como $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$, temos que

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0.$$

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0.$$

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0}_{c} = 0$$

$P = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0}_{c} = 0$$

Com isso,

$$ax + by + c = 0.$$

Esta equação é dita equação cartesiana da reta.

Exemplo 1

1. Encontre a equação cartesiana da reta r que passa por $A = (2, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (3, 2)$.
2. Encontre a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (5, -9)$.

Exercício 1

a. Encontre a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (-1, 5)$

b. Encontre a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto médio entre $A = (1, 2)$ e $B = (3, -2)$ e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

c. Determine uma equação cartesiana da reta r cujas equações paramétrica são:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Respostas

a. $r: -x + 5y - 3 = 0$

b. $M = (2, 0)$ e $\overrightarrow{AB} = (2, -4) = 2(1, -2)$, então $\vec{v} = (1, -2) \perp r$. Assim a reta r é da forma:

$$r: x - 2y + c = 0.$$

Substituindo M na equação da reta, temos que

$$r: x - 2y - 2 = 0.$$

c. $A = (2, 3) \in r$ e $\vec{u} = (3, -1) \mathbin{/\!/} r$, daí, $\vec{v} = (1, 3) \perp r$, portanto a reta é da forma

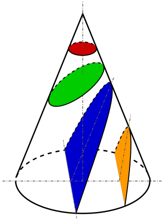
$$r: x + 3y + c = 0.$$

Substituindo A nesta equação, temos

$$r: x + 3y - 11 = 0.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Equação reduzida da reta

A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação reduzida quando está na seguinte forma:

$$y = mx + n.$$

O coeficiente m é dito coeficiente angular da reta e mede a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo OX. E o número n é dito coeficiente linear da reta e representa a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo OY.

Equação segmentária da reta

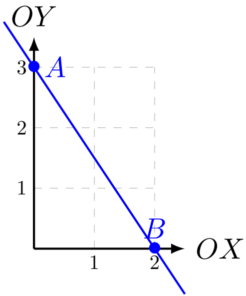
A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação segmentária quando está na seguinte forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

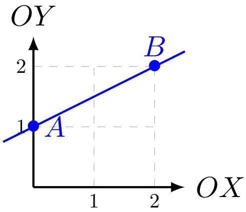
Neste caso, a reta intercepta os eixos OX e OY nas coordenadas p e q respectivamente.

Exemplo

1. Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos $A = (0, 3)$ e $B = (2, 0)$.
2. Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (2, 2)$.



Exemplo 1



Exemplo 2

Exercício

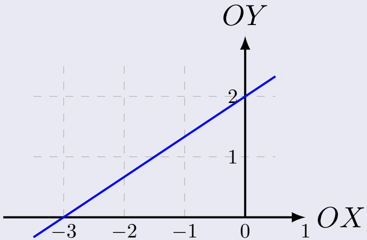
1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.
2. Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

✓ Resposta

1. A reta é da forma $y = 5x + n$. Substituindo A, temos que

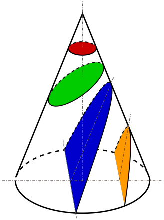
$$y = 5x + 20.$$

2.



Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana

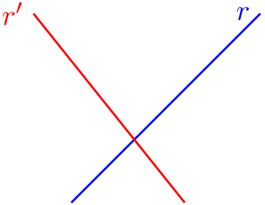


Prof. Reginaldo Demarque

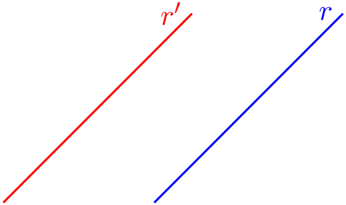
Posição relativa entre retas

No plano, existem três posições que duas retas r e r' podem assumir:

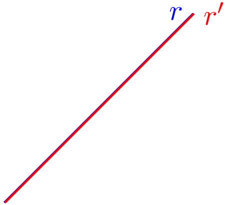
Concorrentes



Paralelas



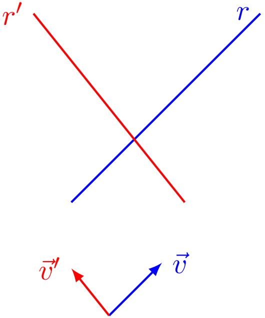
Coincidentes



Posição relativa entre retas

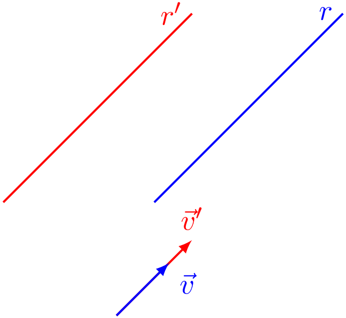
No plano, existem três posições que duas retas r e r' podem assumir:

Concorrentes



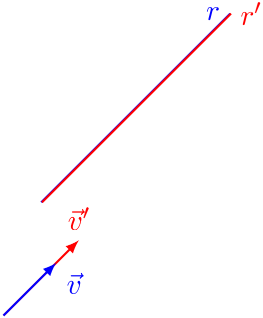
Vetores NÃO são múltiplos

Paralelas



Vetores SÃO múltiplos

Coincidentes



Vetores SÃO múltiplos

Exemplo

Determine as posições relativas entre as retas r e r' do plano onde:

1. $r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$
2. $r : \ x - 3y = 1$ e $r' : \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Exercício

Determine as posições relativas entre as retas r e r' do plano onde:

1. $r : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$
2. $r : \ 3x - 4y = 1$ e $r' : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$
3. Determine a reta paralela à $r : y = -2x + 5$ passando por $P = (1, 1)$.

✓ Resposta

Determine as posições relativas entre as retas r e r' do plano onde:

1. Note que $\vec{v} = (-4, 2) \mathbin{/\!/} r$, $\vec{v}' = (2, -1) \mathbin{/\!/} r'$ e $\vec{v} = -2\vec{v}'$. Portanto as retas são paralelas ou coincidentes. Tomando $P = (2, 3) \in r$ e substituindo nas equações de r' temos que

$$\begin{cases} 2 = -2 + 2t \\ 3 = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2, \end{cases}$$

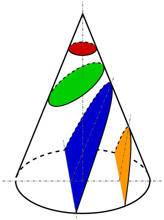
um absurdo, assim $P \notin r'$ e portanto as retas são paralelas.

2. Note que $\vec{u} = (3, -4) \perp r \Rightarrow \vec{v} = (4, 3) \mathbin{/\!/} r$ e $\vec{v}' = (2, -1) \mathbin{/\!/} r'$. Assim, $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ não são múltiplos, portanto r e r' são concorrentes.

3. Seja $y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y = 5 \Rightarrow \vec{u} = (2, 1) \perp r$. Portanto a equação de r' é da forma $r' : 2x + y + c = 0$. Substituindo $P = (1, 1)$ nesta equação, temos que $c = -3$ e portanto

$$r' : 2x + y - 3 = 0.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Ângulos entre retas

Definição 1

Sejam r *e* s *retas no plano e sejam* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *vetores paralelos a* r *e* s *respectivamente. Definimos o* ***ângulo entre*** r ***e*** s *como o ângulo* θ *com* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ *e tal que*

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Exemplo

Encontre o ângulo entre as retas r e s dadas por

$$r: \; 3x - 4y = 1 \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício

1. Determine o ângulo entre as retas

$$r: \; x + y = 6 \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 8 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Determine o ângulo que a reta $3x + 4y = 7$ faz com os eixos coordenados.

✓ Resposta

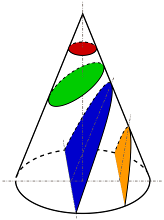
1. $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 78,36^\circ.$
2. $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$ e $\vec{u} = (-4,3)$.

$$\text{Eixo } OX: \ \theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,87^\circ.$$

$$\text{Eixo } OY: \ \theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,13^\circ.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte I: Geometria Analítica Plana

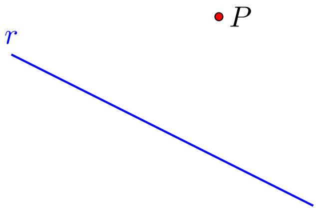


Prof. Reginaldo Demarque

Distância de ponto à reta.

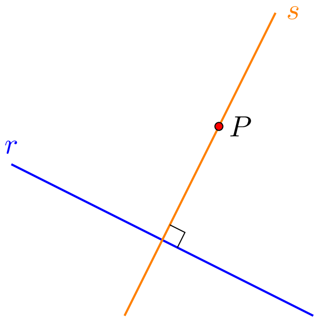
Distância de ponto à reta

Sejam r uma reta e P um ponto do plano. A distância de P a r, que denotaremos por $d(P,r)$, é dada pela distância do ponto P ao ponto Q, onde Q é a interseção da reta r com a reta s, perpendicular a r passando por P.



Distância de ponto à reta

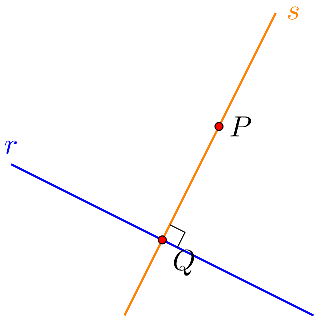
Sejam r uma reta e P um ponto do plano. A distância de P a r, que denotaremos por $d(P, r)$, é dada pela distância do ponto P ao ponto Q, onde Q é a interseção da reta r com a reta s, perpendicular a r passando por P.



Distância de ponto à reta.

Distância de ponto à reta

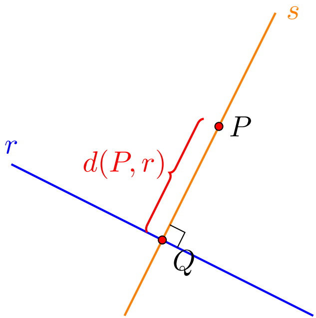
Sejam r uma reta e P um ponto do plano. A distância de P a r, que denotaremos por $d(P, r)$, é dada pela distância do ponto P ao ponto Q, onde Q é a interseção da reta r com a reta s, perpendicular a r passando por P.



Distância de ponto à reta.

Distância de ponto à reta

Sejam r uma reta e P um ponto do plano. A distância de P a r, que denotaremos por $d(P, r)$, é dada pela distância do ponto P ao ponto Q, onde Q é a interseção da reta r com a reta s, perpendicular a r passando por P.



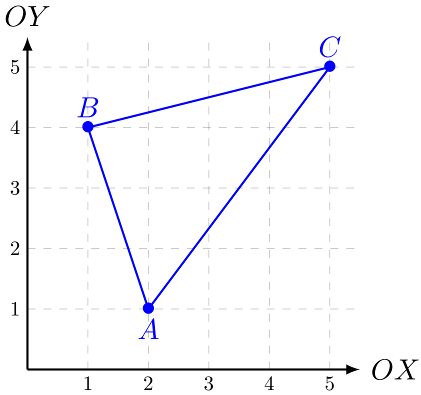
Proposição 1

A distância de um ponto $P = (x_0, y_0)$ *à uma reta* $r: \ ax + by + c = 0$ *é dada por*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

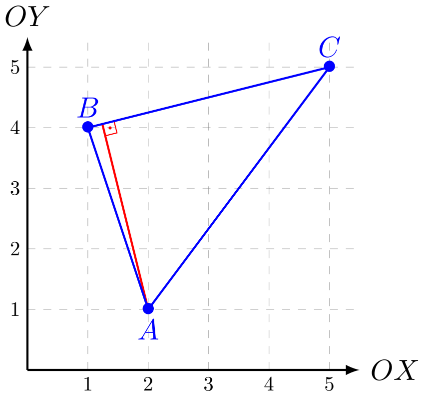
Exemplo

Os vértices do triângulo ABC são $A = (2,1)$, $B = (1,4)$ e $C = (5,5)$. Qual é o comprimento da altura baixada de A sobre a base $\overline{BC}$?



Exemplo

Os vértices do triângulo ABC são $A = (2,1)$, $B = (1,4)$ e $C = (5,5)$. Qual é o comprimento da altura baixada de A sobre a base $\overline{BC}$?



Exercício

1. Determine a distância do ponto $P = (3, 1)$ à reta $r : x + 2y = 3$. Ache o ponto Q sobre a reta r tal que $d(P, Q) = d(P, r)$.
2. Determine a distância do ponto $P = (-4, -2)$ à seguinte reta
$$r : \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = -2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

✓ Resposta

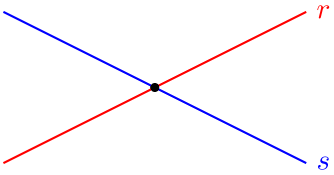
1. $d(P,r) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (cuidado, reescrever $r: x + 2y - 3 = 0$). Fazer $Q = (3 - 2y, y)$, daí,

$$d(P,Q) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 25y^2 - 10y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5} \Rightarrow Q = \left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

2. $r: -3x + 5y + 1 = 0 \Rightarrow d(P,r) = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

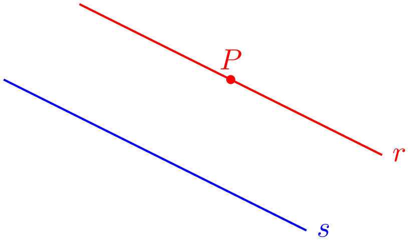
Distância entre retas

Sejam r e s retas no plano. Definimos a distância entre r e s, e denotamos por $d(r,s)$, de acordo com cada um dos seguintes casos:



r e s concorrentes

$$d(r,s) = 0$$



r e s paralelas ou coincidentes

$$d(r,s) = d(P,s), \; P \in r.$$

Exemplo

1. Determine a distância entre as $r: x+y+1=0$ e $s: x=y$.
2. Determine a distância entre as retas r e s dadas por:

$$r:\ 3x-6y=2 \qquad \text{e} \qquad s:\ 2x-4y+5=0.$$

Exercício

1. Qual é a distância entre as retas $r : x - 3y - 4 = 0$ e $s : 2x - 6y - 1 = 0$?
2. Qual é a distância entre as retas $r : x - 3y - 4 = 0$ e $s : x - 6y - 1 = 0$?
3. Quais são as retas situadas à distância 5 da reta $r : 3x - 4y = 1$.

✓ Resposta

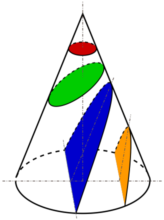
1. $d(r,s) = \frac{7}{2\sqrt{10}}$
2. $d(r,s) = 0$, pois são concorrentes.
3. $P = (-1,-1) \in r$ e $s : 3x - 4y + c = 0$. Substituindo na fórmula:

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|c+1|}{5} = 5 \Rightarrow c = -26 \text{ ou } c = 24.$$

Logo

$$s : 3x - 4y + 24 = 0 \text{ ou } s : 3x - 4y - 26 = 0.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana

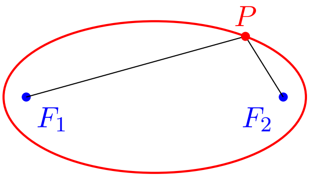


Prof. Reginaldo Demarque

Elipse

Definição 1 (Elipse)

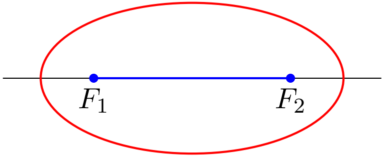
Dados dois pontos no plano F_1 e F_2 uma elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante. Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da elipse.



- F_1, F_2: focos

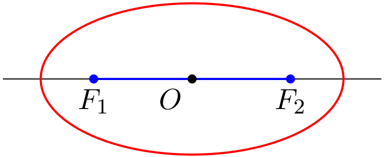
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal



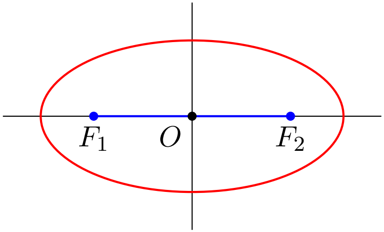
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse



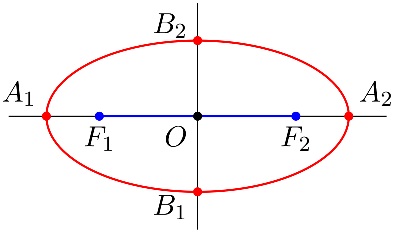
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse



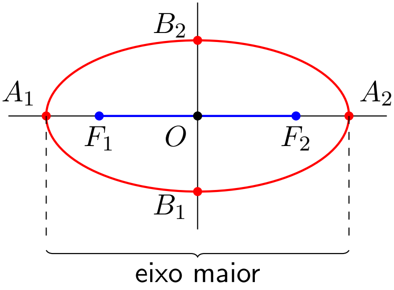
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse
- A_1, A_2, B_1, B_2 : Vértices



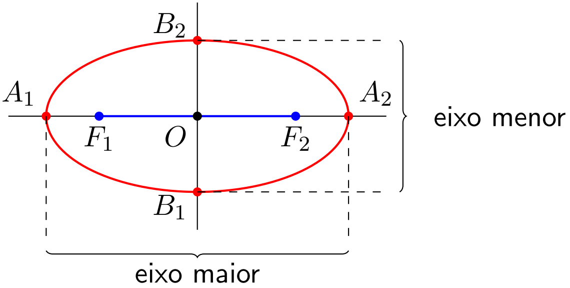
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse
- A_1, A_2, B_1, B_2 : Vértices
- A_1A_2: Eixo maior



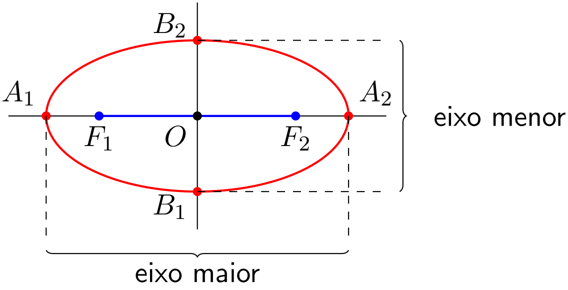
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse
- A_1, A_2, B_1, B_2 : Vértices
- A_1A_2: Eixo maior
- B_1B_2: Eixo menor



Notação

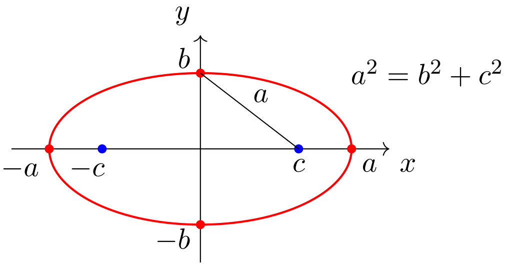
- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- O: centro da elipse
- A_1, A_2, B_1, B_2 : Vértices
- A_1A_2: Eixo maior
- B_1B_2: Eixo menor
- $d(F_1, F_2)$: amplitude focal



Dado uma elipse, considere um sistema de eixos cartesianos com eixo OX determinado segmento focal, com origem no centro da elipse. Neste caso, sendo $2c$ a amplitude focal, $2a$ a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos e $b^2 = a^2 - c^2$, então a equação da elipse é dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

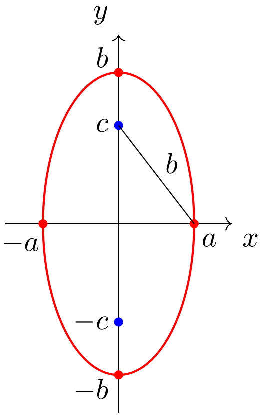
A razão $e = \frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse e, no caso, mede o achatamento da elipse.



Observação 2

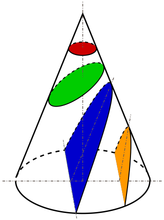
Note que como posicionamos os focos no eixo OX, temos que $b < a$. No caso em que os focos estiverem sobre o eixo OY, a equação terá a mesma forma, entretanto com $b > a$ e satisfazendo $a^2 = b^2 - c^2$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$b^2 = a^2 + c^2$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Exemplo

Encontre as coordenadas dos focos e faça um esboço das seguintes elipses.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $5x^2 + 2y^2 = 15$

Exemplo

Escreva uma equação da elipse cujos focos são $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e o eixo maior mede 20.

Exercício

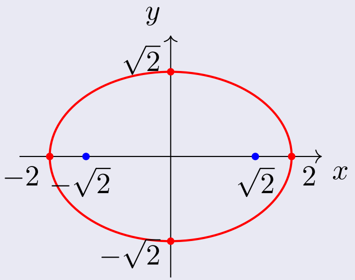
1. Encontre os focos e faça um esboço da elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.
2. Determine a equação da elipse cujos focos estão sobre o eixo OY, o eixo maior mede 10 e a amplitude focal é 6.
3. Prove que o ponto $P = (2\,\text{sen}\, t, \cos t)$ pertence a uma elipse, qualquer que seja o valor de $t \in \mathbb{R}$.
4. Assistir ao filme *Alexandria*[1] (título original: Ágora). Direção: Alejandro Amenábar.

---

[1] Alexandria (2009) - IMDb - https://www.imdb.com/title/tt1186830/

✓ Resposta

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow a = 2, b = \sqrt{2}$ e $c = \sqrt{2} \Rightarrow$ $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$.



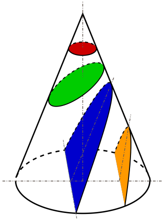
2. $b = 5,\ c = 3.\ b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16$. Portanto,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

3. $x = 2\,\mathrm{sen}\,t,\ y = \cos t \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\,t + 4\cos^2 t = 4(\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t) = 4$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

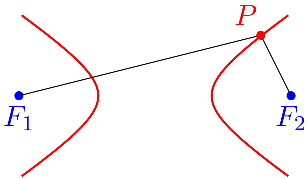
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

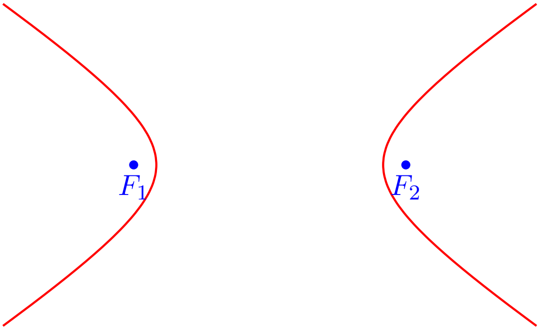
Definição 1 (Hipérbole)

Dados dois pontos no plano F_1 e F_2 uma hipérbole *é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante positiva menor que a distância entre os pontos F_1 e F_2. Os pontos F_1 e F_2 são chamados* focos *da hipérbole.*



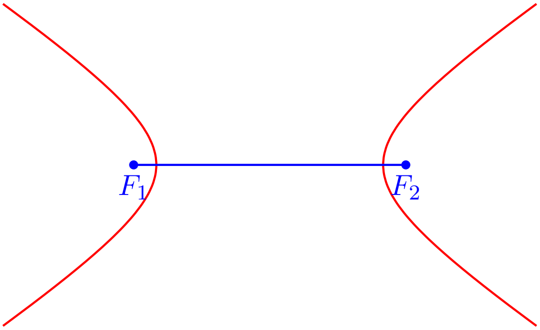
Notação

- F_1, F_2: focos



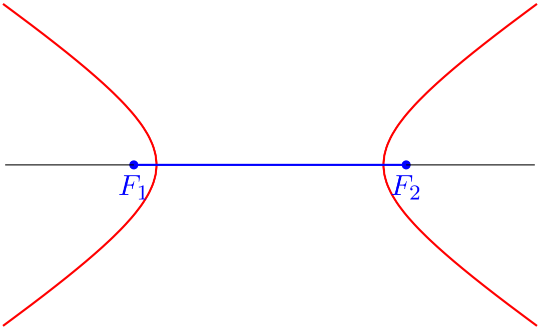
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal



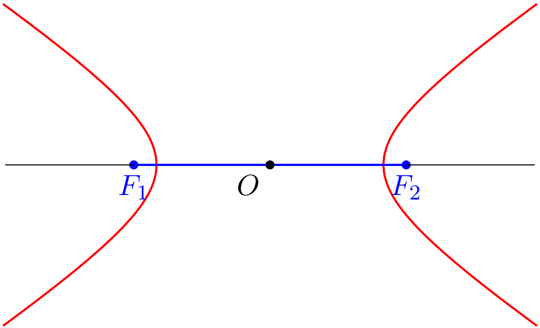
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- eixo focal



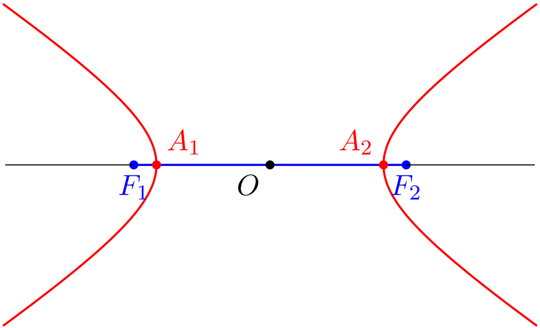
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- eixo focal
- O: centro da Hipérbole



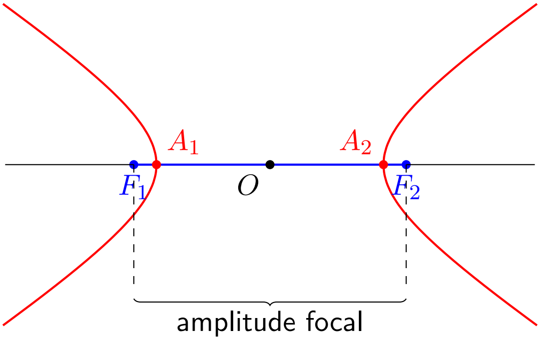
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- eixo focal
- O: centro da Hipérbole
- A_1, A_2 : Vértices



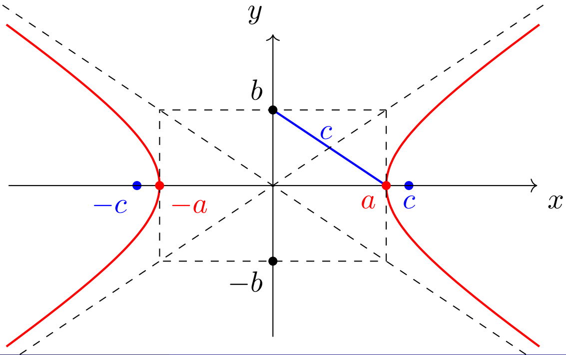
Notação

- F_1, F_2: focos
- F_1F_2: segmento focal
- eixo focal
- O: centro da Hipérbole
- A_1, A_2 : Vértices
- $d(F_1, F_2)$: amplitude ou distância focal



Dado uma hipérbole, considere um sistema de eixos cartesianos tomando-se OX como o eixo focal e a origem como o centro da hipérbole. Neste caso, sendo $2c$ a distância focal, $2a$ o valor absoluto da diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos, onde $0 < a < c$ e $c^2 = b^2 + a^2$, então a equação da hipérbole é dada por

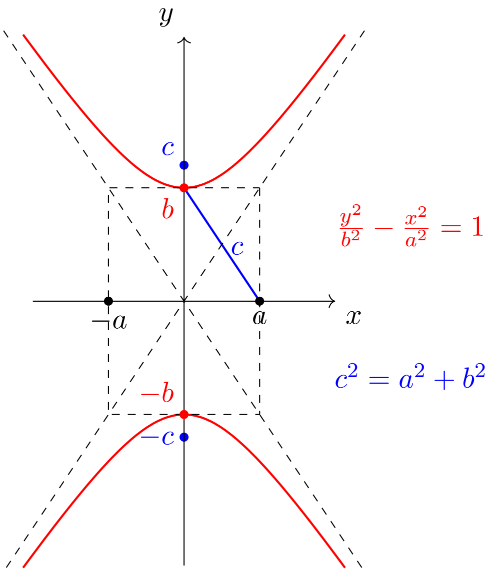
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



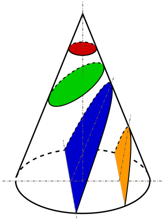
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Observação 2

Como posicionamos os focos no eixo OX, temos que a hipérbole intercepta este eixo em $x = a$ e $x = -a$. No caso em que os focos estiverem sobre o eixo OY, a equação terá uma forma semelhante, com o sinal de menos acompanhando o termo com x e consequentemente interceptará o eixo OY em $y = b$ e $y = -b$



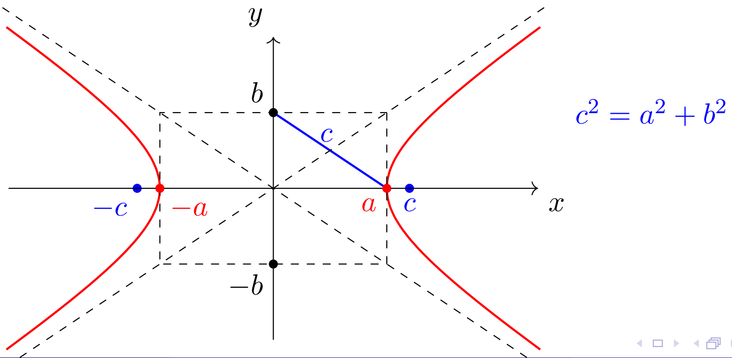
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte I: Geometria Analítica Plana



Prof. Reginaldo Demarque

Dado uma hipérbole, considere um sistema de eixos cartesianos com eixo OX determinado por F_1 e F_2 com origem no ponto médio desses pontos. Neste caso, sendo $2c$ a distância entre os dois focos, $2a$ o valor absoluto da diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos e $c^2 = b^2 + a^2$, então a equação da hipérbole é dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



Exemplo

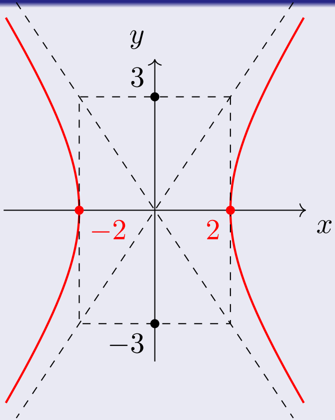
Determine os vértices e focos das hipérboles abaixo e faça um esboço.

1. $5x^2 - 9y^2 = 45$
2. $\frac{9x^2}{25} - y^2 + 9 = 0.$
3. A distância focal é $\sqrt{20}$, os focos pertencem ao eixo OX e uma das assíntotas tem equação $y + 3x = 0$.

Exercício

1. Determine os vértices e focos da hipérboles $9x^2 - 4y^2 = 36$ abaixo e faça um esboço.
2. Obtenha a equação da hipérbole cujos vértices são $(0, 2)$ e $(0, -2)$ e os focos são $(0, 3)$ e $(0, -3)$.

✓ Resposta



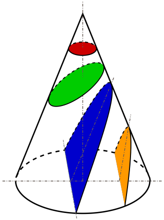
1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 2, b = 3$ e $c = \sqrt{13}$
Focos: $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$
Vértices: $A_1 = (-2, 0)$, $A_2 = (2, 0)$

2. $b = 2$, $c = 3$. $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 5$. Portanto,

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

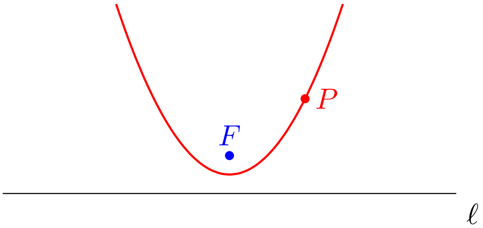
Parte I: Geometria Analítica Plana



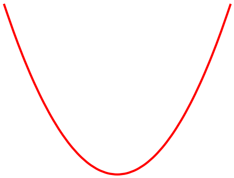
Prof. Reginaldo Demarque

Definição 1 (Parábola)

Dados uma reta ℓ e um ponto F não pertencente a ℓ no plano. Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes da reta ℓ e do ponto F.

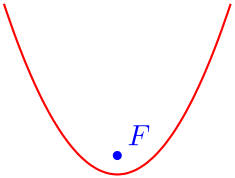


Notação



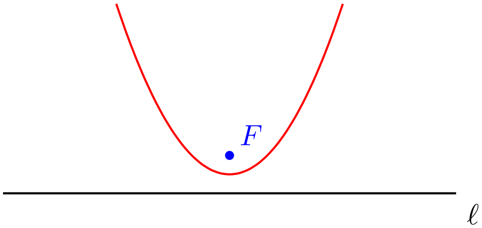
Notação

- F: focos



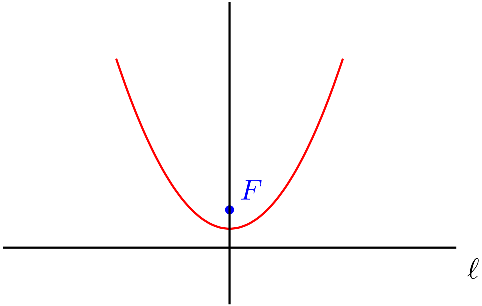
Notação

- F: focos
- ℓ: diretriz



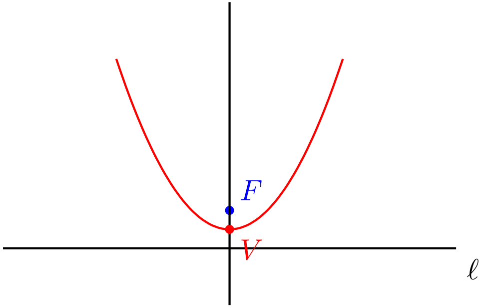
Notação

- F: focos
- ℓ: diretriz
- eixo da parábola



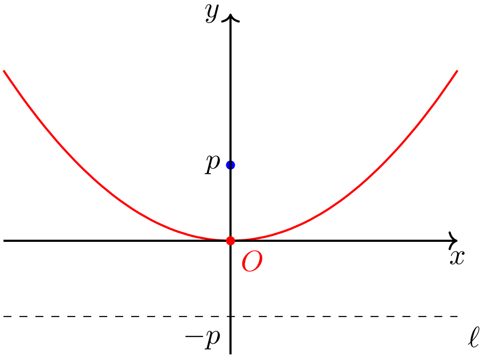
Notação

- F: focos
- ℓ: diretriz
- eixo da parábola
- V: vértice



Dado uma parábola, considere um sistema de eixos cartesianos com a origem O no vértice da parábola e eixo OY determinado pelo eixo da parábola de tal modo que o foco pertença ao semi-eixo positivo. Neste caso, sendo $2p$ a distância de F a ℓ, então a equação da parábola é dada por

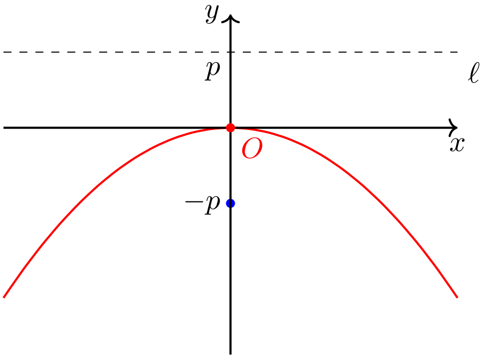
$$\boxed{x^2 = 4py}$$



Observação 2

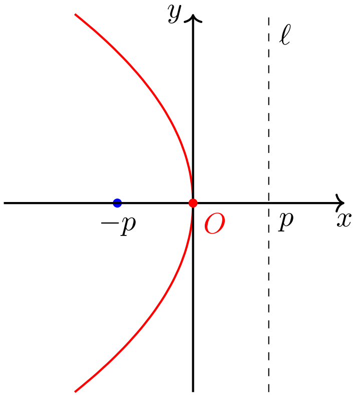
Se o sistema de eixos for escolhido com de tal modo que o foco pertença ao semi-eixo ***negativo*** *de OY, então a equação da parábola é dada por*

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

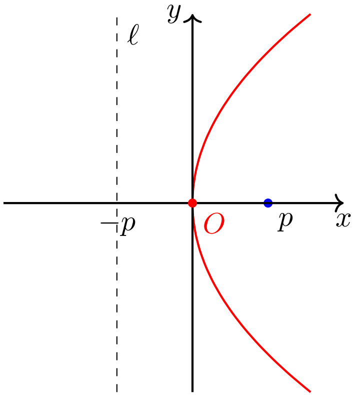


Observação 3

Se o sistema de eixos for escolhido com o eixo OX sendo o eixo da parábola teremos as seguintes situações.



$y^2 = -4px$



$y^2 = 4px$

Curvas que não são parábolas

1. $y = x^4$
2. $y = \cosh x$ (catenária)

Quando um cabo flexível pesado é suspenso entre dois pontos na mesma altura, vemos a formação de uma curva conhecida como catenária, do latim *catena* que significa corrente.

Kette Kettenkurve Catenary, Kamel15

Por que o gráfico de uma função do 2° é uma parábola?

Função do 2° grau

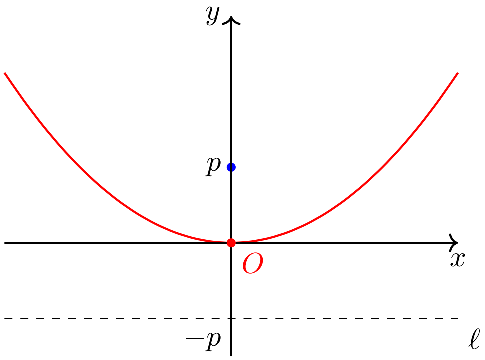
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0.$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

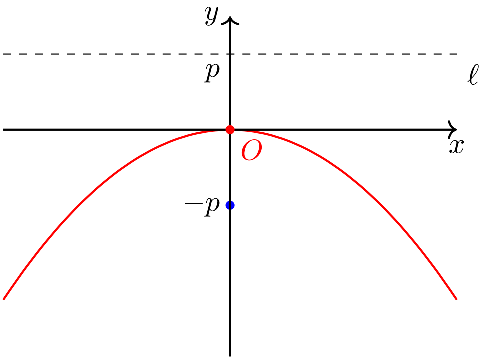
Em particular, se $b = c = 0$ e $a = 1/4p$ temos que

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \Rightarrow x^2 = 4py.$$

Parábola com foco no eixo OY

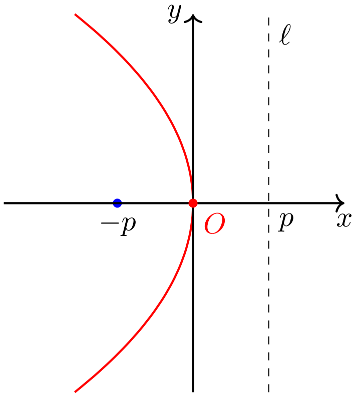


$x^2 = 4py$

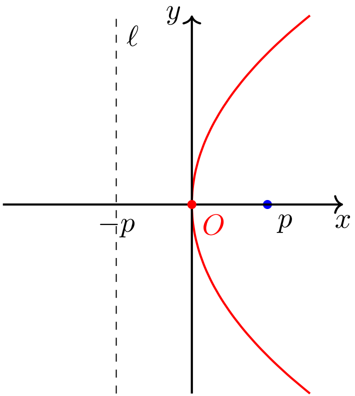


$x^2 = -4py$

Parábola com foco no eixo OX



$$y^2 = -4px$$



$$y^2 = 4px$$

Exemplo

1. Determine o foco e a equação da reta diretriz das parábolas abaixo e faça um esboço:
   a. $y = 10x^2$
   b. $y^2 = 5x$
2. Obtenha a equação da parábola de vértice em $(0, 0)$ e foco em $(-8, 0)$.

Exercício

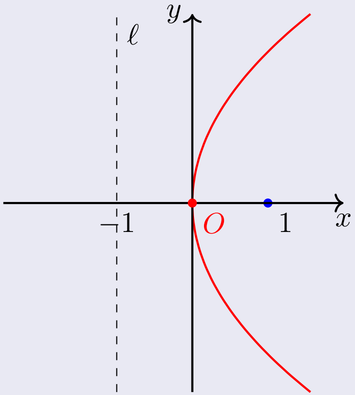
1. Determine o foco, uma equação da diretriz e faça um esboço da parábola

$$y^2 = 4x$$

2. Obtenha a equação da parábola de vértice em $(0,0)$ cuja diretriz tem equação $y = 2$ e faça um esboço.

✓ Resposta

❶ $p = 1 \Rightarrow F = (1, 0)$ e $\ell: \ x = -1.$



❷ $p = 2 \Rightarrow F = (0, -2)$ e $x^2 = -8y.$