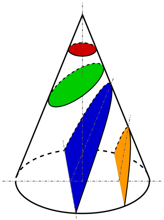
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial

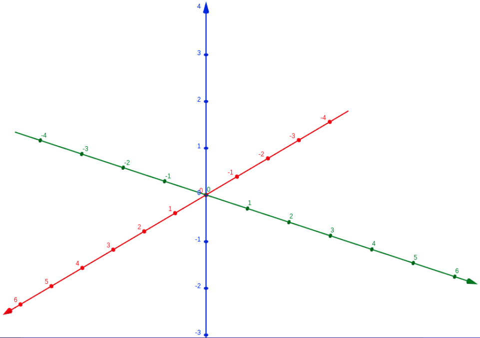


Prof. Reginaldo Demarque

Coordenadas no Espaço

Definição 1 (Sistema de Eixos)

Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço consiste da escolha de um ponto O do espaço, denominado origem, e de três eixos com mesma origem em O e mutuamente perpendiculares, denominadas eixos OX, OY e OZ, de tal modo que a orientação positiva dos eixos é escolhido de acordo com a regra da mão direita.



Para cada ponto P do espaço podemos associar uma tripa $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ chamada de coordenadas do ponto P. A coordenada x é chamada abscissa, y é chamada ordenada e z é chamada cota.

Exemplo

1. Determine os pontos $(1, 3, 1)$ e $(3, -2, 2)$ no sistema cartesiano.
2. Esboce o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $z = 3$

Definição 2

Cada plano determinado por um par de eixos é chamado de plano coordenado. O plano determinado por OX e OY é denotado OXY; o determinado por OX e OZ é denotado por OXZ e o determinado por OY e OZ é denotado por OYZ.

Exercício

Esboce o conjunto dos pontos que satisfazem a equação:

1. $y = 5$.
2. $y = x$

Definição 3 (Distância entre Pontos)

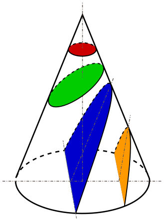
Em um sistema de coordenas cartesianas $OXYZ$, a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_3)$ é dada por

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

Exemplo

1. Determinar a equação que as coordenadas de um ponto $P = (x, y, z)$ deve satisfazer para pertencer à esfera de centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$.
2. Mostre que os pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ formam uma esfera.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Distância entre Pontos

Definição 1 (Distância entre Pontos)

Em um sistema de coordenas cartesianas $OXYZ$, a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

Exemplo

1. Determine a distância entre os pontos $A = (1, 2, 0)$ e $B = (-2, 3, 1)$.
2. Determine o conjunto dos pontos equidistantes dos pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$ e faça um esboço.

Exercício

Determine distância entre os pontos:

1. $A = (-1, 5, 1)$ e $B = (3, 1, -1)$
2. Determine o conjunto dos pontos equidistantes dos pontos $A = (2, 1, -1)$ e $B = (0, 1, 1)$.

✓ Resposta

1. $d(A, B) = 6$
2. $x - z = 1$

Equação da Esfera

Exemplo

1. Determinar a equação que as coordenadas de um ponto $P = (x, y, z)$ deve satisfazer para pertencer à esfera de centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e raio $r > 0$.
2. Mostre que os pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ formam uma esfera.

Exercício

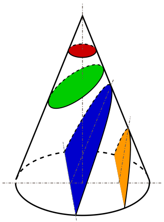
1. Determine a equação da esfera de centro $(6, 5, -2)$ e raio $\sqrt{7}$.
2. Mostre que a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$ é uma esfera e determine seu centro e raio.

✓ Resposta

1. $(x-6)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=7.$
2. $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=5.$ centro $(2,-1,0)$ e raio $\sqrt{5}$.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Segmentos orientados

As definições de segmentos orientados e segmentos equipolentes são as mesmas dadas no plano.

Definição 1 (Vetor)

Um vetor no espaço é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço equipolentes a um segmento orientado dado.

Definição 2 (Coordenadas de um vetor)

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *são pontos do espaço, então, as* *coordenadas* *do vetor* $\overrightarrow{AB}$ *são:*

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Ao comprimento de um vetor $\overrightarrow{v}$*, damos o nome de* *norma* *e denotamos por* $\|\overrightarrow{v}\|$*. Se* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$*, então*

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Operações com vetores

Definimos a soma entre vetores e o produto de um escalar por um vetor no espaço da mesma maneira que no plano. Sendo $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores no espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue das definições que

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ \\ \lambda \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \end{array}}$$

Valem as mesmas propriedades da soma e do produto por um escalar de vetores no plano.

Exemplo

1. Dados $A = (0, 3, 1)$, $B = (2, 3, -1)$ e $C = (0, 1, 0)$ determine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. Determine as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{u}$ que possui a mesma direção e sentido que o vetor $\overrightarrow{v} = (-2, 4, 2)$ e tenha comprimento 6.

Exercício

1. Sejam $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ os vetores canônicos. Determine as coordenadas do vetor unitário $\overrightarrow{u}$ com mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v} = 8\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.
2. Sejam $A = (-1,4,-2)$ e $B = (7,-4,2)$. Encontre o ponto no P segmento AB que está a $3/4$ do caminho de A a B.

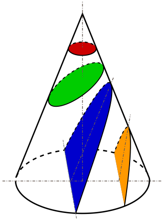
✓ Resposta

1. $\|\vec{v}\| = 9 \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{8}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{4}{9}\right)$
2. $\overrightarrow{AB} = (8, -8, 4) \Rightarrow \vec{v} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (6, -6, 3).$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{v} \Rightarrow P = (5, -2, 1).$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

O Produto escalar ou interno no espaço é definido da mesma forma que no plano e valem as mesmas propriedades, a saber:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos \theta,}$$

onde θ é o ângulo entre eles.

Propriedade do Produto Interno

Dados $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$;
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$;
3. $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$;
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$;
5. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

Proposição 1

Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *então*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Exemplo

1. Determine vetores ortogonais a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$ paralelos a cada um dos planos coordenados.
2. Calcule o ângulo entre $\overrightarrow{u} = (2, 0, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.

Exercício

1. Determine x de modo que $\overrightarrow{u} = (x+1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (x-1, -1, -2)$ sejam ortogonais.
2. Determine os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$ e a $\overrightarrow{v} = (2, -4, 6)$.

✓ Resposta

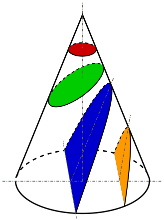
1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}.$
2. Seja $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{w} = (-z, z, z),\ \ z \in \mathbb{R}.$$

$$\|\overrightarrow{w}\| = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3z^2 = 27 \Rightarrow z = \pm 3 \Rightarrow \overrightarrow{w} = (-3, 3, 3) \text{ ou } \overrightarrow{w} = (3, -3, -3).$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Produto Vetorial

Definição 1

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores no espaço. O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, designado por $\vec{u} \times \vec{v}$, é o único vetor do espaço que satisfaz as seguinte condições:

1. *o comprimento é $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$;*
2. *a direção é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente;*
3. *o sentido é dado pela regra da mão direita.*

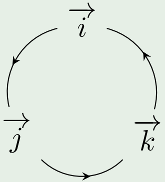
Geometricamente, $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo formado pelos representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com mesma origem.

Exemplo

Mostre que

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$



Propriedades do Produto Vetorial

1. $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ são múltiplos.
2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ (anticomutatividade).
3. $(\lambda\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.
4. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.

Exemplo

Mostre que se $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Exercício

Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$, então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são múltiplos.

✓ Resposta

Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$, então

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} - \vec{t}) \times (\vec{v} - \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w} - \vec{t} \times \vec{v} + \vec{t} \times \vec{w} \\
&= \vec{w} \times \vec{t} - \vec{v} \times \vec{t} - \vec{t} \times \vec{v} + \vec{t} \times \vec{w} \\
&= -\vec{t} \times \vec{w} + \vec{t} \times \vec{v} - \vec{t} \times \vec{v} + \vec{t} \times \vec{w} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

Proposição 2

Em um sistema ortogonal de coordenadas, se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *então*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right)$$

Exemplo

1. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Encontre $\vec{u} \times \vec{v}$.
2. Sejam $P_0 = (1, -1, 2)$, $P = (1, 3, 1)$ e $Q = (1, -1, 0)$. Calcule a área do paralelogramo $\mathcal{P}$ que tem os segmentos P_0P e P_0Q como arestas adjacentes.

Exercício

Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 0)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (0, 4, 3)$.

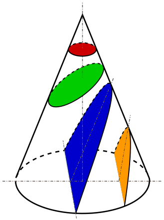
✓ Resposta

Temos que $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 2, 3)$, daí,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-10, 0, 10) \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 5\sqrt{2}.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Produto Misto

Definição

O *produto misto* *dos vetores* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *no espaço é o número real*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] := (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Geometricamente, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$ representa o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ com mesmo vértice.

Proposição

Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, *então*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix},$$

Exemplo

Determinar o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ que tem por arestas adjacentes os segmentos AB, AC e AD , onde $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$ e $D = (1, -1, -1)$.

Exercício

Determine x para que o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, x, 1)$ seja igual a 15.

✓ Resposta

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -4)$ e $\overrightarrow{AD} = (-1, -1 + x, -5)$.

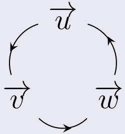
$$\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 15 \Rightarrow |11x - 37| = 15 \Rightarrow 11x - 37 = 15 \text{ ou } 11x - 37 = -15$$

$$\Rightarrow x = \frac{52}{11} \text{ ou } x = 2.$$

Propriedades do Produto Misto

1. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos a um mesmo plano.
2. O produto misto é alternado, isto é, permutar dois vetores altera os sinal

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] \\
&= \quad [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]
\end{aligned}$$



Propriedades do Produto Misto

3. O produto misto é trilinear, isto é,

$$[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$$

$$[\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$$
$$[u, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}]$$
$$[u, v, \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2}]$$

Exemplo

Prove que $[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}]=2[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$

Exercício

Sendo $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 6$, calcule $[2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}]$

✓ Resposta

$$[2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}] = 4[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 24$$

Proposição

Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento do Determinante pelos cofatores da 3ª linha

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento do Determinante pelos cofatores da 3ª linha

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento do Determinante pelos cofatores da 3ª linha

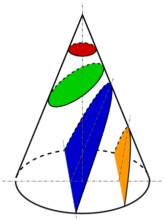
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento do Determinante pelos cofatores da 3ª linha

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

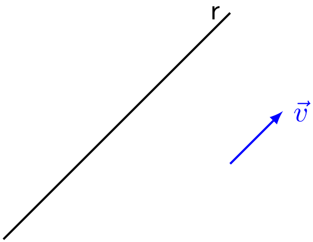
Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Definição

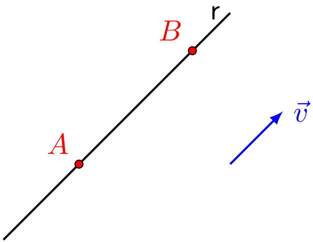
Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é paralelo a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \parallel r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$.



Equação Paramétrica da Reta

Definição

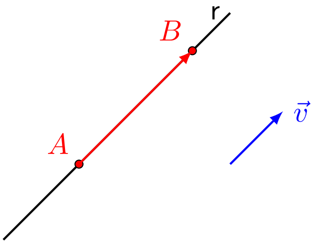
Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é paralelo a uma reta* r*, e escrevemos* $\overrightarrow{v} \parallel r$*, se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$*, o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$*.*



Equação Paramétrica da Reta

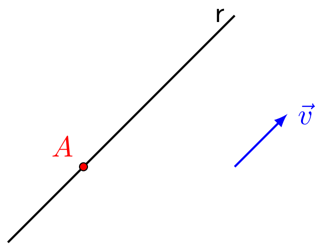
Definição

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ *é paralelo a uma reta* r, *e escrevemos* $\overrightarrow{v} \,/\!/\, r$, *se, para quaisquer pontos* $A, B \in r$, *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$.

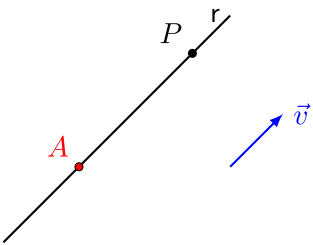


Equação Paramétrica da Reta

Fixe um ponto A de uma reta r e seja $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo a esta reta.



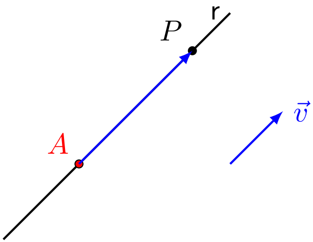
Fixe um ponto A de uma reta r e seja $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto P desta reta r.

Equação Paramétrica da Reta

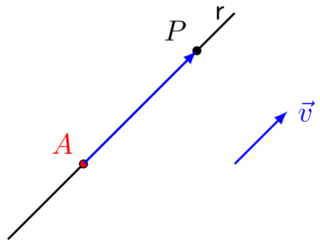
Fixe um ponto A de uma reta r e seja $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto P desta reta r. Existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Fixe um ponto A de uma reta r e seja $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo a esta reta.



Dado qualquer ponto P desta reta r. Existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}. \tag{1}$$

Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor de r.

Em coordenadas

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

Em coordenadas

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c)$$

Em coordenadas

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c) \Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Em coordenadas

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c) &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)\\ &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc), \ \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Em coordenadas

$P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}.$$

$$\begin{aligned}(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c) &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)\\ &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc), \ \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de equações paramétricas da reta r.

Exemplo

1. Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.
2. Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.

Exercício

1. Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B.
2. Repita o Exemplo 2 agora com o ângulo reto no vértice C.

✓ Resposta

1. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2, 2, -1)$ é um vetor diretor e tomando A com ponto inicial, temos que

$$r : \begin{cases} x = & 2 & -2t \\ y = & -1 & +2t \\ z = & 0 & -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

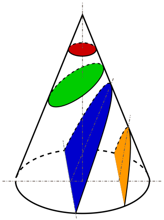
2. $C = (1 + t, 2 + t, -3t)$, $\overrightarrow{CB} = (-t - 4, -t - 2, 3t + 9)$ e $\overrightarrow{CA} = (-t - 1, -t - 1, 3t + 8)$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow 11t^2 + 59t + 78 = 0 \Rightarrow t = -3 \text{ ou } t = -\frac{26}{11}.$$

Logo, $C = (-2, -1, 9)$ ou $C = \left(-\frac{15}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{78}{11}\right)$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Dependência e Independência linear

Definição

Dois vetores são ditos linearmente dependentes (LD) quando um dos dois é múltiplo do outro. E dizemos que são linearmente independentes (LI) caso contrário.

Definição

Dizemos que um vetor $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quando existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

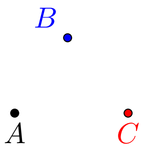
$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

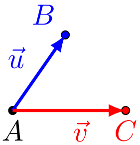


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

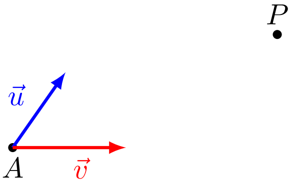


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

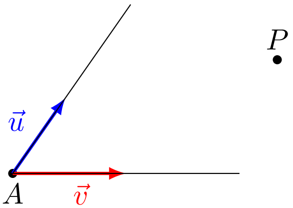


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

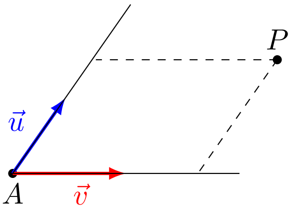


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

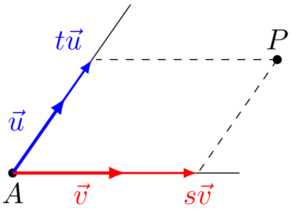


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.

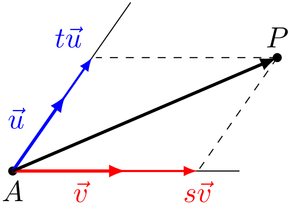


Equações paramétricas de plano

Dados A, B e C pontos não-colineares do espaço e seja π o único plano que os contêm. Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ são LI. Um ponto P pertence ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \text{ para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é dita equação paramétrica vetorial do plano π e os escalares t e s são ditos os parâmetros do ponto P.



Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3)$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3) \\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3) \\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0 + tu_1 + sv_1,
\end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\,\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0 + tu_1 + sv_1, y_0 + tu_2 + sv_2,
\end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3) \\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3) \\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0 + tu_1 + sv_1, y_0 + tu_2 + sv_2, z_0 + tu_3 + sv_3), \ \forall t, s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\,\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0 + tu_1 + sv_1, y_0 + tu_2 + sv_2, z_0 + tu_3 + sv_3),\ \forall t, s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Que também pode ser escrita como

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{v},\ \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Em coordenadas

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} = t\,\vec{u} + s\vec{v}.$$

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tu_1, tu_2, tu_3) + (sv_1, sv_2, sv_3)\\
\Rightarrow &(x, y, z) = (x_0 + tu_1 + sv_1, y_0 + tu_2 + sv_2, z_0 + tu_3 + sv_3),\ \forall t, s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Que também pode ser escrita como

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Com isso,

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3,\ t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Este sistema é chamado de sistema de equações paramétricas do plano π.

Exemplo

Seja π o plano que contém o ponto $A = (3, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$. Determine as equações paramétricas de π e verifique se o ponto $(1, 2, 2)$ pertence a π.

Exercício

Verificar que os pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 1, 1)$ não são colineares. Determinar equações paramétricas para o plano que os contêm.

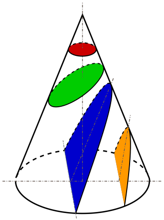
✓ Resposta

Note que $A = (1, 1, 0)$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$, daí,

$$\begin{cases} x = 1 & & -s \\ y = 1 & -t & \\ z = 0 & +t & +s, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Definição

Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{n}$ é normal *a um plano π quando $\overrightarrow{n}$ é normal a qualquer vetor $\overrightarrow{AB}$, onde A, $B \in \pi$.*

Se $\overrightarrow{n}$ é normal a um plano π e $P_0 \in \pi$, então

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0, \ \forall P \in \pi$$

Em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Em coordenadas

Sejam $\vec{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$\Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= 0 \\ \Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\ \Rightarrow &(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ \Rightarrow &a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ \Rightarrow &ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $\vec{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$
\begin{aligned}
& \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\
\Rightarrow & (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow & ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \\
\Rightarrow & ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0
\end{aligned}
$$

Em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\
\Rightarrow &(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow &a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow &ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \\
\Rightarrow &ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0 \\
\Rightarrow &ax + by + cz + d = 0.
\end{aligned}$$

Em coordenadas

Sejam $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ então

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\
\Rightarrow &(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow &a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
\Rightarrow &ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \\
\Rightarrow &ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0 \\
\Rightarrow &ax + by + cz + d = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, os pontos do plano devem satisfazer a seguinte equação cartesiana

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.}$$

Exemplo

1. Determinar uma equação cartesiana para o plano que contém os pontos $A = (1, 0, 1)$ $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$. Faça um esboço desse plano.
2. Verifique se os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 2, 3)$ são paralelos ao plano $\pi : 2x - 3y + 4z - 600 = 0$.

Não existe equação cartesina da reta no espaço

Na Geometria Analítica Plana vimos que as retas do plano são descritas por equações da forma

$$ax + by + c = 0.$$

No contexto da Geometria Analítica Espacial, uma equação deste tipo sempre representa um plano. Sempre estará subentendido que a terceira variável que não aparece na equação tem seu coeficiente nulo.

Exemplo

Uma equação como $x + y - 2 = 0$ descreve um plano paralelo ao eixo OZ.

Exercício

1. Obtenha uma equação cartesiana para o plano π que contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, 1, 0)$.
2. Verifique se o vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano $\pi : 4x - 6y + z = 3$, nos casos:
   a. $\vec{u} = (-1, -2, 3)$
   b. $\vec{u} = (0, 1, 6)$
   c. $\vec{u} = (3, 2, 0)$
   d. $\vec{u} = (-3, 2, 24)$

✓ Resposta

1. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, -1) \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-1, 2, -4)$. Logo, a equação é do tipo

$$-x + 2y - 4z + d = 0$$

Substituindo A nesta equação chegamos em $d = -1$ e portanto na equação

$$\pi : -x + 2y - 4z - 1 = 0.$$

2. $\vec{n} = (4, -6, 1)$, fazendo $\vec{n} \cdot \vec{u}$ em cada caso, são paralelos os vetores dos itens b, c e d.

Equação Cartesiana do Plano

A equação cartesiana de um plano é da forma

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.},$$

onde o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal ao plano.

Exemplo

1. Determinar equações paramétricas para o plano $\pi : 2x + 3y + z = 1$.
2. Determinar a equação cartesiana do plano que contém as retas

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t, \ \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 2s \\ z = 3 + s, \ \ s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercício

1. Obtenha as equações paramétricas do plano $\pi : 4x + 2y - z + 5 = 0$.
2. Mostre que o ponto $P = (4, 1, -1)$ não pertence à reta $r : X = (2, 4, 1) + t(1, -1, 2)$ e obtenha uma equação cartesiana do plano α que contém P e r.

✓ Resposta

1. Note que $A = (0,0,5) \in \pi$ e que $\vec{n} = (4,2,-1) \perp \pi$. Como $\vec{u} = (0,1,2) \perp \vec{n}$ e $\vec{v} = (1,0,4) \perp \vec{n}$ são LI, temos que

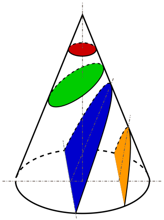
$$\pi : \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 5 + 2t + 4s, \ \ t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. $A = (2,4,1) \in r \subset \alpha$, $\vec{u} = \vec{AP} = (2,-3,-2) \mathbin{/\!/} \alpha$ e $\vec{v} = (1,-1,2) \mathbin{/\!/} \alpha$. Então $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-8,-6,1) \perp \alpha$. Logo,

$$\alpha : -8x - 6y + z - 39 = 0.$$

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

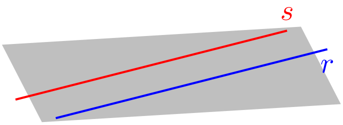
Parte II: Geometria Analítica Espacial



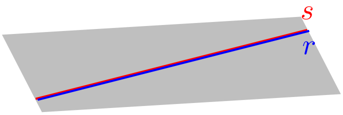
Prof. Reginaldo Demarque

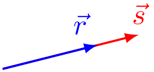
No espaço, existem quatro posições que duas retas r e s podem assumir:

Paralelas



Coincidentes

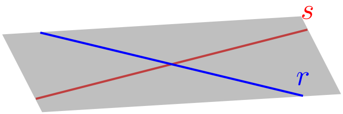




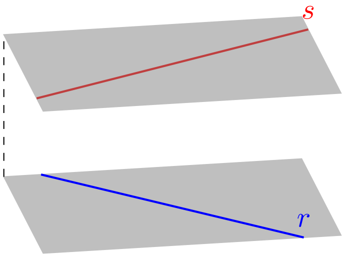
Vetores LD

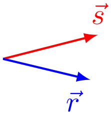
No espaço, existem quatro posições que duas retas r e s podem assumir:

Concorrentes



Reversas





Vetores LI

Exemplo

Determine a posição relativa entre as retas $r : X = (1, 2, 3) + t(0, 1, 3)$ e s, nos casos:

1. $s : X = (1, 3, 6) + t(0, 2, 6)$.
2. $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.
3. $s : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$

Exercício

Determine a posição relativa entre r e s abaixo.

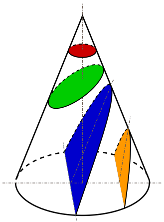
1. $r : X = (8, 1, 9) + t(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + t(1, -2, 2)$
2. $r : X = (1, -1, 1) + t(-2, 1, -1)$ e $s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

✓ Resposta

1. $\vec{r} = (2, -1, 3)$ e $\vec{s} = (1, -2, 2)$ são LI, portanto as retas são reversas ou concorrentes. Tomando $A = (8, 1, 9) \in r$ e $B = (3, -4, 4) \in s$, temos que $\overrightarrow{AB} = (-5, -5, -5)$, daí,
$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0,$$
logo as retas são concorrentes.
2. Substituindo-se $X = (1 - 2t, -1 + t, 1 - t)$ nas equações de s vemos que r e s não possuem pontos em comum. Portanto são reversas ou paralelas. Como $\vec{n}_1 = (0, 1, 1) \perp s$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, -1) \perp s$, então $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-2, 1, -1) = \vec{r}$, portanto são paralelas.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial

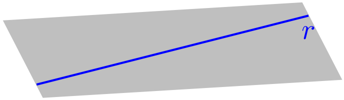


Prof. Reginaldo Demarque

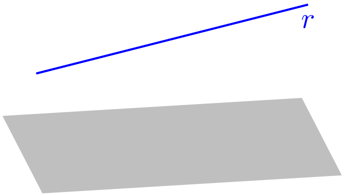
Posição relativas entre retas e planos

No espaço, existem três posições que uma reta r e um plano π podem assumir:

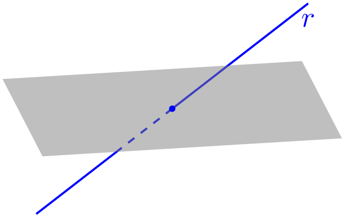
r está contida em π



Parelelos



Transversais



Exemplo

Determine a posição relativa entre a reta r e o plano π, nos casos:

1. $r : X = (1,1,0) + t(1,-1,1)$ e $\pi : x + y - z + 2 = 0.$
2. $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$ e $\pi : x + y - 2 = 0.$
3. $r : \begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ e $\pi : x + y + 4z = 4.$

Exercício

Estude a posição relativa entre r e π.

1. $r : X = (1,1,1) + t(3,2,1)$ e $\pi : X = (1,1,3) + t(1,-1,1) + s(0,1,3)$
2. $r : X = (1,1,0) + t(0,1,-1)$ e $\pi : x - y - z = 2$

✓ Resposta

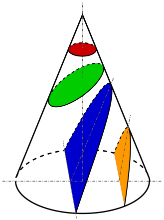
1. $\vec{r} = (3, 2, 1)$ e $\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 3) = (-4, -3, 1)$ é normal ao plano. Como $\vec{n} \cdot \vec{r} = -17$, a reta r é transversal a π.
2. Substituindo $(x, y, z) = (1, 1 + t, -t)$ na equação de π temos que

$$1 - (1 + t) + t = 0 \neq 2.$$

Isso significa que a reta não intercepta o plano π, portanto são paralelos.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial

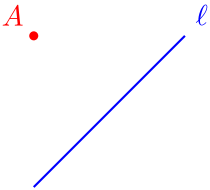


Prof. Reginaldo Demarque

Distância de um ponto a uma reta

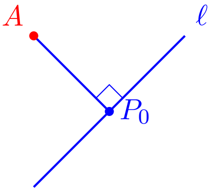
Definição

Dados um ponto A e uma reta ℓ, a distância entre A e ℓ, denotada por $d(A, \ell)$, é a menor das distâncias de A aos pontos de ℓ.



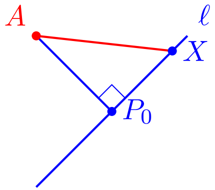
Definição

Dados um ponto A e uma reta ℓ, a distância entre A e ℓ, denotada por $d(A, \ell)$, é a menor das distâncias de A aos pontos de ℓ.



Definição

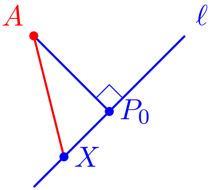
Dados um ponto A e uma reta ℓ, a ***distância entre A e ℓ****, denotada por $d(A,\ell)$, é a menor das distâncias de A aos pontos de ℓ.*



Distância de um ponto a uma reta

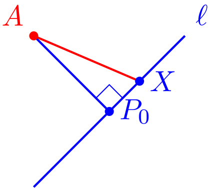
Definição

Dados um ponto A e uma reta ℓ, a distância entre A e ℓ, denotada por $d(A, \ell)$, é a menor das distâncias de A aos pontos de ℓ.



Definição

Dados um ponto A e uma reta ℓ, a distância entre A e ℓ, denotada por $d(A,\ell)$, é a menor das distâncias de A aos pontos de ℓ.



Proposição

Sejam A *um ponto e* ℓ *uma reta. Se* P *é um ponto qualquer de* ℓ *e* $\overrightarrow{v}$ *é um vetor diretor de* ℓ *então*

$$d(A,\ell) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Exemplo

1. Achar a distância do ponto $A = (3, 0, -2)$ à reta $\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2. Obtenha os pontos da interseção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{14/3}$ da reta $s : x = y = z + 1$.

Exercício

1. Determine a distância do ponto $A = (-2, 0, 1)$ e $r : X = (1, -2, 0) + t(3, 2, 1)$.
2. Obtenha os pontos da reta $r : x = y = z$ que equidistam das retas $s : X = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$ e $u : X = (0, 0, 1) + t(1, 0, -1)$.

✓ Resposta

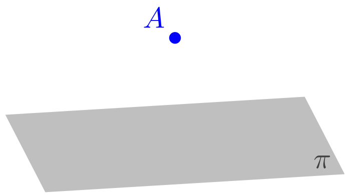
1. $A = (-2, 0, 1)$, $P = (1, -2, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$. $\overrightarrow{AP} = (3, -2, -1)$ e $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (0, -6, 12)$, portanto
$$d(A, r) = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = 3\frac{\sqrt{70}}{7}$$

2. Note que $A = (t, t, t)$, $\vec{s} = (1, 1, 0)$, $P = (1, 0, 0) \in s$, $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $Q = (0, 0, 1) \in u$. Daí,
$$d(A, s) = d(A, u) \Rightarrow \frac{\sqrt{2t^2 + 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2t^2 + (1 - 2t)^2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1.$$
Logo $A = (0, 0, 0)$ ou $A = (1, 1, 1)$.

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A,\pi) = d(A,P).$$

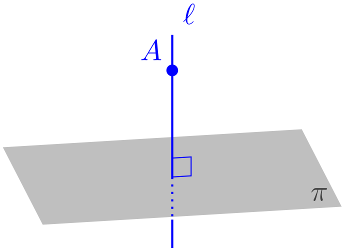


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$

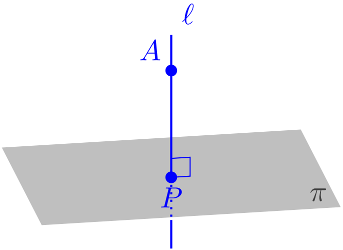


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$

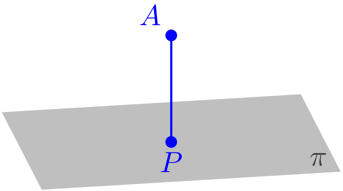


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$

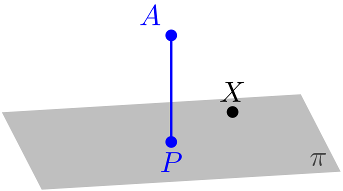


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

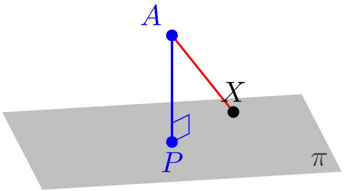
$$d(A, \pi) = d(A, P).$$



Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$

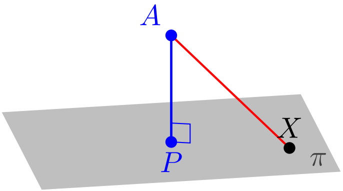


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$

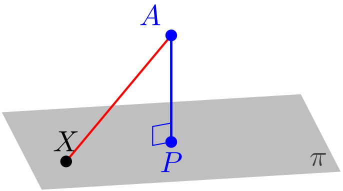


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto A, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por A perpendicular a π. Sendo $P = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre A e P é a menor que a distância entre A e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de A a π por

$$d(A, \pi) = d(A, P).$$



Proposição

Sejam π *um plano e* A *um ponto fora de* π. *Se* $\overrightarrow{n}$ *um vetor normal a* π *e* $P_0 \in \pi$ *um ponto qualquer diferente de* A, *então*

$$d(A,\pi) = \frac{|\overrightarrow{P_0A} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exemplo

Determine a distância do ponto $A = (1, -2, 1)$ ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 4t + s \\ y = t - 2s \\ z = -2 - s, \ \ t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Usando uma equação paramétrica da reta ℓ podemos mostrar que

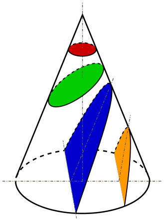
$$\boxed{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Exemplo

Calcule a distância do ponto $P_0 = (1, 2 - 1)$ ao plano $\pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial

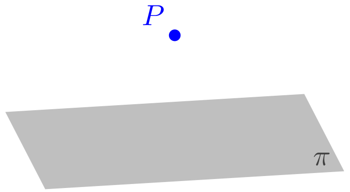


Prof. Reginaldo Demarque

Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

$$d(P, \pi) = d(P, P_0).$$

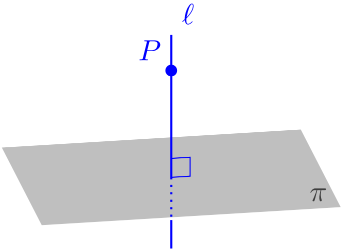


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

$$d(P,\pi) = d(P,P_0).$$

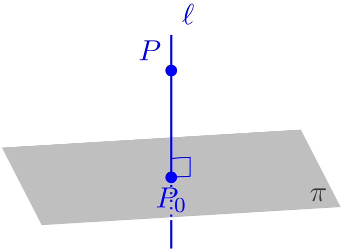


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

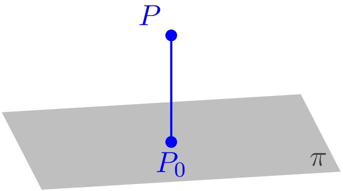
$$d(P, \pi) = d(P, P_0).$$



Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

$$d(P, \pi) = d(P, P_0).$$

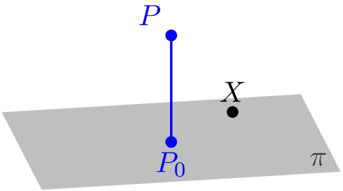


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π *e um ponto* P*, sabemos que existe uma única reta* ℓ *passando por* P *perpendicular a* π*. Sendo* $P_0 = \pi \cap \ell$*, é fácil ver que a distância entre* P *e* P_0 *é a menor que a distância entre* P *e qualquer outro ponto* X *de* π*. Com isso definimos a distância de* P *a* π *por*

$$d(P,\pi) = d(P,P_0).$$

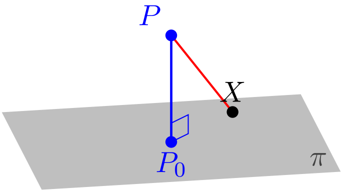


Distância de um ponto a um Plano

Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

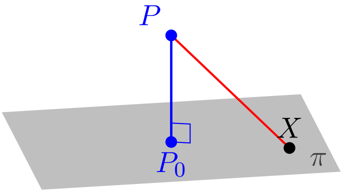
$$d(P,\pi) = d(P,P_0).$$



Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

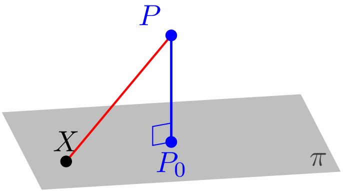
$$d(P,\pi) = d(P,P_0).$$



Definição

Dados um plano π e um ponto P, sabemos que existe uma única reta ℓ passando por P perpendicular a π. Sendo $P_0 = \pi \cap \ell$, é fácil ver que a distância entre P e P_0 é a menor que a distância entre P e qualquer outro ponto X de π. Com isso definimos a distância de P a π por

$$d(P, \pi) = d(P, P_0).$$



Proposição

Sejam π um plano e P um ponto qualquer. Se $\overrightarrow{n}$ um vetor normal a π e $A \in \pi$ um ponto qualquer diferente de P, então

$$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exemplo

Determine a distância do ponto $P = (1, -2, 1)$ ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 4t + s \\ y = t - 2s \\ z = -2 - s, \; t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercício

Calcule a distância do ponto $P = (1, 3, 4)$ ao plano $\pi : X = (1, 0, 0) + t(1, 0, 0) + s(-1, 0, 3)$.

✓ Resposta

$\vec{n} = (1,0,0) \times (-1,0,3) = (0,-3,0) \perp \pi$, $A = (1,0,0) \in \pi$ e $\overrightarrow{AP} = (0,3,4)$. Logo,

$$d(P,\pi) = \frac{|(0,3,4)\cdot(0,-3,0)|}{\|(0,-3,0)\|} = 3.$$

Desafio

Obtenha a equação geral do plano π que contém a reta $r : X = (1, 0, 1) + t(1, 1, -1)$ e que dista $\sqrt{2}$ do ponto $P = (1, 1, -1)$.

Distância em Coordenadas

Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$. Então

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo

1. Calcule a distância do ponto $P = (1, 2 - 1)$ ao plano $\pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$.
2. Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

Exercício

1. Calcule a distância do ponto $P = (1, 1, 15/6)$ ao plano $\pi : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$.
2. Obtenha os pontos da reta $r : X = (0, 1, 1) + t(1, 1, 2)$ que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$ e do plano $\pi_2 : x - y + 2z = 1$.

✓ Resposta

1. $d(P,\pi) = \frac{7}{2}$
2. $P = (t, 1+t, 1+2t) \Rightarrow d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|t-2|}{\sqrt{6}} = \frac{|4t|}{\sqrt{6}} \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$ *ou* $t = \frac{2}{5}$. Logo

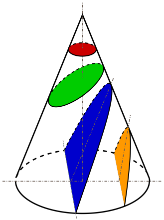
$$P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ou } P = \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Desafio

Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$.

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Parte II: Geometria Analítica Espacial



Prof. Reginaldo Demarque

Distância entre duas retas

Definição

Dados duas retas r e s, a distância entre r e s, denotada por $d(r, s)$, é a menor das distâncias entre todos os pontos de r e s.

Fórmulas de Distância

Sejam $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ vetores diretores de r e s e sejam P e Q pontos de r e s respectivamente. Podemos dividir o cálculo da distância em dois casos:

1. Se $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ não são múltiplos, então
$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}]|}{\|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{s}\|}.$$
2. Se $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ são múltiplos, então
$$d(r,s) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{r}\|}{\|\overrightarrow{r}\|},$$

Exemplo

1. Calcule a distância entre as retas:
   $r : X = (-1, 2, 0) + t(1, 3, 1)$ e $s : 3x - 2z - 3 = 0 = y - z - 2$
2. Calcule a distância entre as retas $r : X = (1, -1, 1) + t(-2, 1, -1)$ e
   $s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

Exercício

Calcule a distância entre as retas $r : X = (2,1,0) + t(1,-1,1)$ e

1. $s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0.$
2. $s : -x + 1 = y = -z - 2.$

✓ Resposta

1. $\vec{r} = (1, -1, 1)$, $\vec{s} = (1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, -3)$, daí, $\vec{r} \times \vec{s} = (1, 4, 3)$, os vetores não são múltiplos. Como $P = (2, 1, 0) \in r$ e $Q = (0, -1, 1) \in s$, então $\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, 1)$. Logo,
$$d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{26}}$$

2. Note que $\vec{r} = (1, -1, 1)$ e $\vec{s} = (-1, 1, -1)$ são múltiplos. Tomando $P = (2, 1, 0) \in r$ e $Q = (1, 0, -2) \in s$ temos que $\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -2)$, $\overrightarrow{PQ} \times \vec{r} = (-3, -1, 2)$ e portanto
$$d(r, s) = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$

Desafio

Determine a reta r que contém o ponto $A = (1, 3, -1)$, é paralela ao plano $\pi : x + z = 2$ e dista 3 da reta $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$.