Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras

Gabarito da 2ª Geometria Analítica e Cálculo Vetorial – 2/2014
22/11/2014

1. Considere as retas $r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = t, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-2t \\ z = 1+2t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   (a) [1 pt] Encontre a equação geral do plano π que contém r e s.

   (b) [1 pt] Encontre a equação da esfera de centro $C = (1, 0, -1)$ que é tangente ao plano π.

Solução:

(a)

0,3

Sabemos que $\vec{v} = (1, -1, 1)$ é um vetor diretor para r e s. Além disso, $P_r = (2, 1, 0) \in r$ e $P_s = (1, 1, 1) \in s$.

0,5

Neste caso, um vetor normal ao plano π é

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, -1).$$

Neste caso a equação é da forma $-x - 2y - z + d = 0$.

0,2

Substituindo as coordenadas de P_r na equação do plano encontramos $d = 4$. Logo a equação do plano é:

$$-x - 2y - z + 4 = 0$$

(b)

0,5

O raio desta esfera é dado pela distância entre C e o plano π. Com isso,

$$d(C, \pi) = \frac{|-1+1+4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

0,5

Neste caso, a equação da esfera é:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{8}{3}$$

2. Considere os planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y - 1 = 0$.

   (a) [1 pt] Obtenha as equações paramétricas da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

(b) [2 pts] Encontre os pontos da reta r que estão a uma distância de $\sqrt{6}/6$ do plano $\pi_3 : x + 2y + z - 1 = 0$.

Solução:

(a)

0,2

Sabemos que $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (2, -1, 0)$ são vetores normais de π_1 e π_2 respectivamente.

0,3

Neste caso um vetor diretor para r é:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, -3)$$

0,3

Resta encontrar um ponto que pertence a r. Fazemos $z = 0$ nas equaçãoes de π_1 e π_2 e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1/3$ e $y = -1/3$. Logo um ponto de r é $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$.

0,2

Logo, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} + 2t \\ z = -3t, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b)

0,5

Do item anterior temos que um ponto da reta é da forma $P_t = \left(\frac{1}{3} + t, -\frac{1}{3} + 2t, -3t\right)$. Neste caso, devemos determinar os valores de t tais que

$$d(P_t, \pi_3) = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

1,0

Como o vetor normal a π_3 é $\vec{n} = (1,2,1)$ temos que

$$d(P_t, \pi_3) = \frac{\left|-\frac{2}{3} - 2t + 2\left(-\frac{1}{3} + 2t\right)\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \left|-\frac{4}{3} + 2t\right| = 1$$
$$\Rightarrow -\frac{4}{3} + 2t = 1 \text{ ou } -\frac{4}{3} + 2t = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \text{ ou } t = \frac{7}{6}.$$

0,5

Substituindo em P_t, temos que os pontos são: $P_{1/6} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ e $P_{7/6} = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{7}{2}\right)$

3. [2 pts] Encontre o raio e o centro da circunferência que é a interseção do plano $\pi : 2x - 2y - z + 9 = 0$ com a esfera $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$.

Solução:

0,5

Sabemos que $\vec{n} = (2,-2,-1)$ é um vetor normal de π, $C = (3,-2,1)$ é o centro e $R = 10$ é o raio da esfera.

0,5

Por um lado, sabemos que o centro da circunferência pertence à reta r que passa por C na direção do vetor $\vec{n}$. Uma parametrizada para r é dada por

$$r : (x,y,z) = (3,-2,1) + t(2,-2,1) = (3-2t, -2-2t, 1+t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que o centro da circunferência é da forma $C_0 = (3-2t, -2-2t, 1+t)$.

0,5

Por outro lado, como C_0 pertence a π, substituindo as coordenadas de C_t na equação de π obtemos $t = -2$. Logo, $C_0 = (-1,2,3)$.

0,5

Dado um ponto P qualquer da circunferência sabemos que seu raio é dado por $d(P, C_0)$. Observe que neste caso, o triângulo ΔPC_0C é retângulo, onde CP é a hipotenusa.
Como $d(C,P) = 10$ é o raio da esfera, e $d(C, C_0) = 6$, usando a fórmula de Pitágora, temos que o raio da circunferência é $d(P, C_0) = 8$.

4. Considere as restas r_1 e r_2 dadas por:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 3t, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{e } r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(a) [1 pt] Mostre que r_1 e r_2 são reversas.

(b) [1 pt] Calcule a distância entre elas.

(c) [1 pt] Determine a reta que intercepta r_1 e r_2 perpendicularmente.

Solução:

(a)

0,5

Note que $\vec{v}_1 = (0, 1, 3)$ e $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ são vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente.. Além disso, $P_1 = (1, 2, 3) \in r_1$ e $P_2 = (0, 1, 0) \in r_2$.

0,5

Como

$$[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = 2,$$

temos que as retas são reversas.

(b)

0,4

Sabemos que o volume do paralelepidedo cujas arestas são os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$, é dado por

$$|[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]| = 2$$

0,3

Além disso, a área da base do mesmo paralelepípedo é dada por

$$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{14}.$$

0,3

Logo, a distância entre as retas é a altura deste paralelepípedo que é dada por

$$d(r_1, r_2) = h = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

(c)

0,3

Seja r a reta perpendicular a r_1 e r_2.
Um vetor diretor para essa reta é o vetor

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-2, 3 - 1).$$

0,5

Resta encontrarmos um ponto que pertence a r. Para isso, sejam Q_1 e Q_2 os pontos de r que interceptam as retas r_1 e r_2 respectivamente. Neste caso, temos que Q_1 e Q_2 são da forma:

$$Q_1 = (1, 2 + t, 3 + 3t) \text{ e } Q_2 = (s, 1 + s, s).$$

Como $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $\vec{v}$ são paralelos temos que

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Com isso, temos o sistema

$$\begin{cases} 10 + 10s - 4t = 0 \\ 5 + 6s - t = 0 \\ -5 - 2s + 5t = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $s = -5/7$ e $t = 5/7$. Com isso, temos que $Q_1 = \left(1, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

0,2

Logo, temos que a reta r é dada por

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \frac{9}{7} + 3t \\ z = \frac{6}{7} - t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$