Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Ciência e Tecnologia – RIC
Departamento de Física e Matemática – RFM
Campus de Rio das Ostras

Gabarito da 1ª Prova de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial 1 – 2/2014
27/09/2014

1. [2 pontos] Verifique se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo e justifique sua resposta.
   (a) Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$
   (b) Se $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos.

Solução:
(a)

1,0

Falso. Note que se $\overrightarrow{u} = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,1)$ e $\overrightarrow{w} = (0,0)$, então

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0, \text{ mas } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{w}.$$

(b)

1,0

Verdadeiro. De fato, Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então, por definição, eles são paralelos.
No caso em que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, seja θ o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Neste caso, temos que

$$\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\cos\theta| = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \Rightarrow |\cos\theta| = 1 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi.$$

Logo, eles são paralelos.

2. [2 pontos] Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (3,2)$ e $B = (2,-1)$ e cujo centro pertence à reta $x + y - 1 = 0$.

Solução:

0.5

Sabemos que a $r : x + y - 1 = 0$ tem equaçãoes paramétricas dadas por

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Com isso temos que um ponto sobre a reta r é da forma $P = (t, 1-t)$.

1,0

Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$d(A,P) = d(B,P).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
&d(A,P) = d(B,P)\\
\Rightarrow&\sqrt{(t-3)^2 + (-1-t)^2} = \sqrt{(t-2)^2 + (2-t)^2}\\
\Rightarrow&(t-3)^2 + (-1-t)^2 = (t-2)^2 + (2-t)^2\\
\Rightarrow&(t-3)^2 + (t+1)^2 = 2(t-2)^2\\
\Rightarrow&2t^2 - 4t + 10 = 2t^2 - 8t + 8\\
\Rightarrow&t = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo $t = -1/2$, temos que $P = (-1/2, 3/2)$ é o centro da circunferência.

0,5

Além disso, o raio da circunferência é dado por

$$d(B,P) = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Com isso, a equação da circunferência é:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

3. [2 pontos] Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P = (2, -1)$ e formam um ângulo de $\pi/4$ com a reta $2x - 3y + 7 = 0$.

Solução:

0,5

Sabemos que um vetor paralelo à reta $r : 2x - 3y + 7 = 0$ é o vetor

$$\overrightarrow{v} = (3, 2).$$

Basta encontrarmos os vetores que formam um ângulo de $\pi/4$ com $\overrightarrow{v}$, ou seja, encontrar $\overrightarrow{u} = (a, b)$ tal que

$$\frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1,0

Multiplicando esta última igualdade por $2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ e elevando ao quadrado, temos que

$$\begin{aligned}
&2|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\\
\Rightarrow&2(3a+2b)^2 = 13(a^2+b^2)\\
\Rightarrow&18a^2+24ab+8b^2 = 13a^2+13b^2\\
\Rightarrow&5a^2+24ab-5b^2 = 0\\
\Rightarrow&5\left(a^2+\frac{24}{5}ab+\frac{144}{25}b^2-\frac{144}{25}b^2\right)-5b^2 = 0\\
\Rightarrow&5\left(a+\frac{12}{5}b\right)^2-\frac{169}{5}b^2 = 0\\
\Rightarrow&\left[\sqrt{5}\left(a+\frac{12}{5}b\right)-\frac{13\sqrt{5}}{5}b\right]\left[\sqrt{5}\left(a+\frac{12}{5}b\right)+\frac{13\sqrt{5}}{5}b\right] = 0\\
\Rightarrow&\left[\sqrt{5}a-\frac{\sqrt{5}}{5}b\right]\left[\sqrt{5}a+5\sqrt{5}b\right] = 0\\
\Rightarrow&5a = b \quad \text{ou} \quad a = -5b.
\end{aligned}$$

Neste caso, temos que

$$\vec{u} = (a,5a) \text{ ou } \vec{u} = (-5b,b) \Rightarrow \vec{u} = a(1,5) \text{ ou } \vec{u} = b(-5,1).$$

Com isso, temos que os vetores diretores das retas procuradas são $\vec{u}_1 = (1,5)$ e $\vec{u}_2 = (-5,1)$.

0,5

Logo as equações das retas procuradas são da forma

$$5x-y+c_1 = 0 \quad \text{e} \quad x+5y+c_2 = 0.$$

Substituindo o ponto $P = (2,-1)$ em ambas as equações obtemos que

$$c_1 = -11 \quad \text{e} \quad c_2 = 3.$$

Logo as retas procuradas tem equações dada por:

$$5x-y-11 = 0 \quad \text{e} \quad x+5y+3 = 0.$$

4. [2 pontos] Considere os pontos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e a reta $r : 2x-y+2 = 0$. Encontre os pontos sobre a reta r que formam com A e B um triângulo de área 1.

Solução:

1,0

Note que a reta $r: 2x - y + 2 = 0$ tem equações paramétricas dadas por

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Com isso um ponto sobre a reta r é da forma $P = (t, 2t+2)$. Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que o triângulo ΔAPB tenha área 1.

0,5

Sabemos que a área deste triângulo é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{AP}\|^2\|\overrightarrow{AB}\|^2 - (\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})^2}.$$

0,5

Note que

$$\overrightarrow{AP} = (t, 2t-2),\ \overrightarrow{AB} = (1,0),\ \|\overrightarrow{AP}\|^2 = 5t^2 + 8t + 4,\ \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 1 \text{ e } (\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})^2 = t^2.$$

Daí, substituindo na formula da área do triângulo e igulando a 1 temos que

$$\sqrt{5t^2 + 8t + 4 - t^2} = 2 \Rightarrow 4t^2 + 8t + 4 = 4 \Rightarrow t(t+2) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = -2.$$

Logo, $P = (0,2)$ ou $P = (-2,-2)$.

5. [2 pontos] Determine a equação reduzida, principais elementos (foco(s), eixos, equaçãoes das retas importantes (ou diretriz ou eixo ou assíntotas), vértices, excentricidade, etc.), além de um esboço da cônica de equação $x^2 + 36y^2 - 10x + 16 = 0$

Solução:

0,5

Primeiramente, vamos completar o quadrado da equação a fim de obtermos a equação reduzida da cônica.

$$\begin{aligned} & x^2 + 36y^2 - 10x + 16 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 10x + 25 - 25 + 36y^2 + 16 = 0 \\ \Rightarrow & (x-5)^2 + 36y^2 = 9 \\ \Rightarrow & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \end{aligned}$$

0,5

Diretamente da equação equação reduzida sabemos que a cônica é uma elípse, com semi-eixo maior paralelo ao eixo OX de tamanho $a = 3$, semi-eixo menor paralelo ao eixo OY de tamanho $b = 1/2$ e centrada em $P = (5, 0)$.

0,5

Além disso, sendo $2c$ a distância entre os dois focos sabemos que

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Com isso temos que a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{35}}{6}.$$

Como a elípse está centrada em $P = (5, 0)$ temos que os eixos de simetria são as retas $x = 5$ e $y = 0$. Além disso, sabemos que os focos são:

$$F_1 = \left(5 - \frac{\sqrt{35}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad F_2 = \left(5 + \frac{\sqrt{35}}{2}, 0\right)$$

0,5

Abaixo segue o esboço da elípse.