UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – UFF
INSTITUTO DE HUMANIDADES E SAÚDE – RHS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA – RCN
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS – CURO

1ª Prova de GA
18/05/2022 – 2022-1
Turma K1

Quest.	Pts	N
1	1	
2	2,5	
3	3	
4	3,5	
Total:	10	

Instruções

- A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação.
- Responda cada questão de maneira clara e organizada.
- Resultados sem justificativas não serão considerados.
- Uma questão com mais de uma solução terá nota zero.
- Os celulares devem ser mantidos desligados.
- Resposta final correta com solução incorreta terá nota zero.
- Não é permitido o compartilhamento de material.
- Não é permitido sair da sala (tomar água, ir ao banheiro e etc) sem entregar definitivamente a avaliação.
- Aos alunos envolvidos em algum tipo de fraude, mesmo que identificada posteriormente, será atribuído nota zero na prova.

Nome: GABARITO

1. [1 pt] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $x + 2y + 5 = 0$ no espaço? Qual é a relação entre este objeto e o vetor $\vec{u} = (1, 2, 0)$?
   (b) Escreva a equação da esfera de centro em $C = (1, -2, 7)$ e raio $\sqrt{3}$.
   (c) Obtenha um vetor ortogonal a $\vec{u} = (1, 0, -3)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 1)$ simultaneamente.
   (d) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o que podemos concluir?
   (e) Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. O que representa geometricamente $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$?

2. [2,5 pts] Sejam $A = (1, 0, 5)$, $B = (-2, 1, 1)$, $C = (-3, 1, 0)$ e $D = (4, -2, 1)$ vértices de um tetraedro. Calcule o volume e a altura relativa ao vértice A deste tetraedro.

3. [3 pts] Encontre o raio e o centro da circunferência que é a interseção do plano $\pi : -x + 2y - 2 = 0$ com a esfera $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$.

4. [3,5 pts] Uma quadrado $ABCD$ tem a diagonal BD contida na reta $r : x = y - z - 1 = -z$. Sendo $A = (0, 0, 1)$ um dos seus vértices, determine os outros três.

Questão 1 :

a) O objeto geométrico representado por $x+2y+5=0$ é um plano.
O veto $\vec{u}=(1,2,0)$ é ortogonal ao plano.

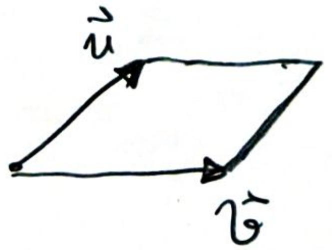
b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=3.$

c) $\vec{u}=(1,0,-3)$
$\vec{v}=(-3,2,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}=(6,8,2)$

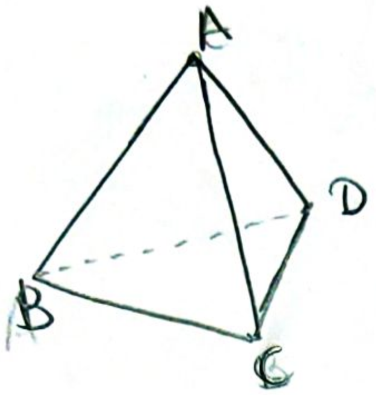
Sabemos que $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

d) Podemos concluir que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

e) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo que tem como lados adjacentes representants de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem.



Questão 2:



$\vec{BA} = (3, -1, 4)$

$\vec{BC} = (-1, 0, -1)$

$\vec{BD} = (6, -3, 0)$

Volume do Tetraedro:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}\right| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Área da base BDC:

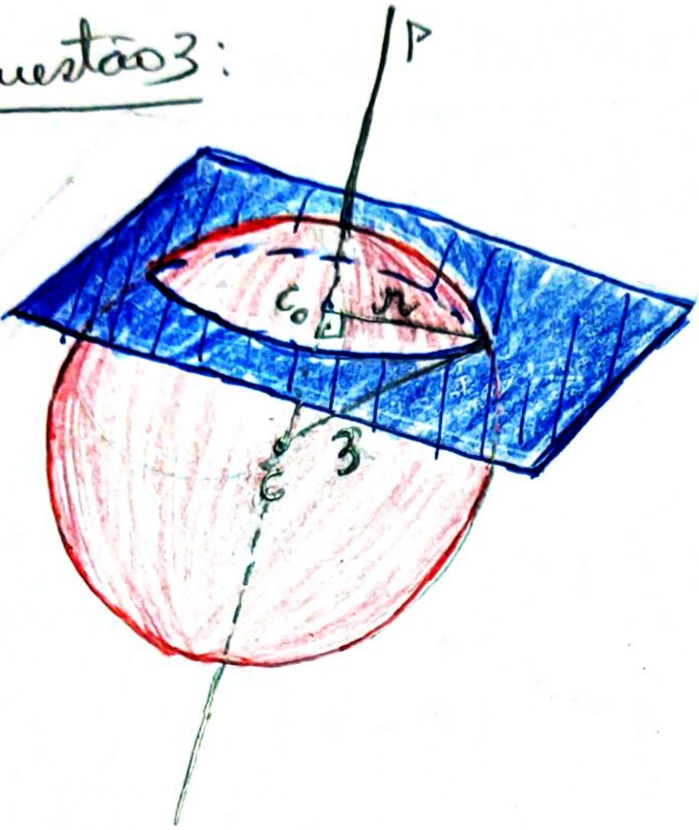
$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (-3, -6, 3)$$

$$\Rightarrow A_b = \frac{\|\vec{BC} \times \vec{BD}\|}{2} = \frac{\sqrt{9+36+9}}{2} = \frac{3\sqrt{2+4}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Com isso, $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$, daí,

$$h = \frac{3V}{A_b} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Questão 3:



Sabemos que $C = (1, 0, -3)$ é o centro da esfera.

Determinando o raio do círculo

Pela figura, podemos ver que o raio do círculo é dado por:

$$r^2 + d(C, C_0)^2 = 9$$

Note que $d(C, C_0) = d(C, \pi)$, daí,

$$d(C, \pi) = \frac{|-1 - 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$ Com isso,

$$r^2 + \frac{9}{5} = 9 \Rightarrow r^2 = 9 - \frac{9}{5} = \frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}}$$

~~Questão 4:~~

Determinando o centro C_0:

O centro do círculo C_0 pertence à reta s que passa por C e é normal ao plano.

Note que

$$s: X = (1, 0, -3) + t(-1, 2, 0)$$
$$= (1 - t, 2t, -3).$$

Com isso, $C_0 = (1 - t, 2t, -3)$ para algum $t \in \mathbb{R}$

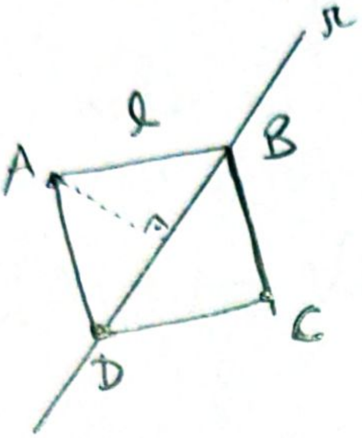
Como $C_0 \in \pi$, temos que

$$-(1-t) + 4t - 2 = 0 \Rightarrow -1 + t + 4t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 5t = 3 \Rightarrow t = 3/5. \text{ Logo}$$

$$C_0 = \left(1 - \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, -3\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, -3\right).$$

Questão 4:



Seja d a medida da diagonal.

Então $\frac{d}{2} = dist(A, r)$

Da equação de r, temos:

$$\begin{cases} x = -z \\ y - z - 1 = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases},$$

fazendo $z = t$, temos:

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \text{ daí, } P = (0,1,0) \in r \text{ e}$$

$\vec{r} = (-1, 0, 1) \parallel r$.

Com isso, $\vec{AP} = (0, 1, -1)$ e

$$d(A, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|(1,1,1)\|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$\Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Por Pitágoras, sabemos que $d = l\sqrt{2}$, daí,

$$l = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Neste caso, para encontrar B e D, devemos buscar os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A, isto é, seja $X = (-t, 1, t)$, daí,

$$d(X,A) = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1 + (t-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t^2 + 1 + t^2 - 2t + 1 = 3$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ em X temos:

$$B = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Fazendo $t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ em X temos:

$$D = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Por fim, pela lei do Paralelogramo,

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (-1, 2, -1)$$

$$\Rightarrow C = (-1, 2, 0).$$