Gabarito da 2ª avaliação de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial - 1/2015

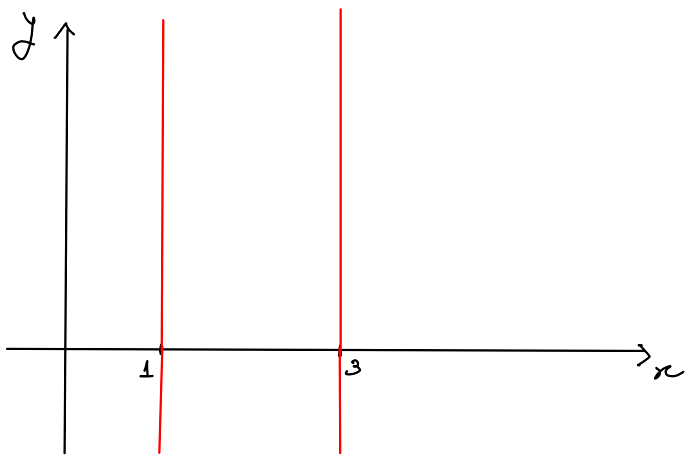
Questão 1:

(a) Note que

$$(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x-1=0 \text{ ou } x-3=0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=3$$

Assim a cônica é dada pelo seguinte conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x=1 \text{ ou } x=3\} = \{(1,y),(3,y);\ y\in\mathbb{R}\}$$



(b) Completando quadrado temos

$$y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=(x-2)^2-1$$

$$\Rightarrow y+1=(x-2)^2$$

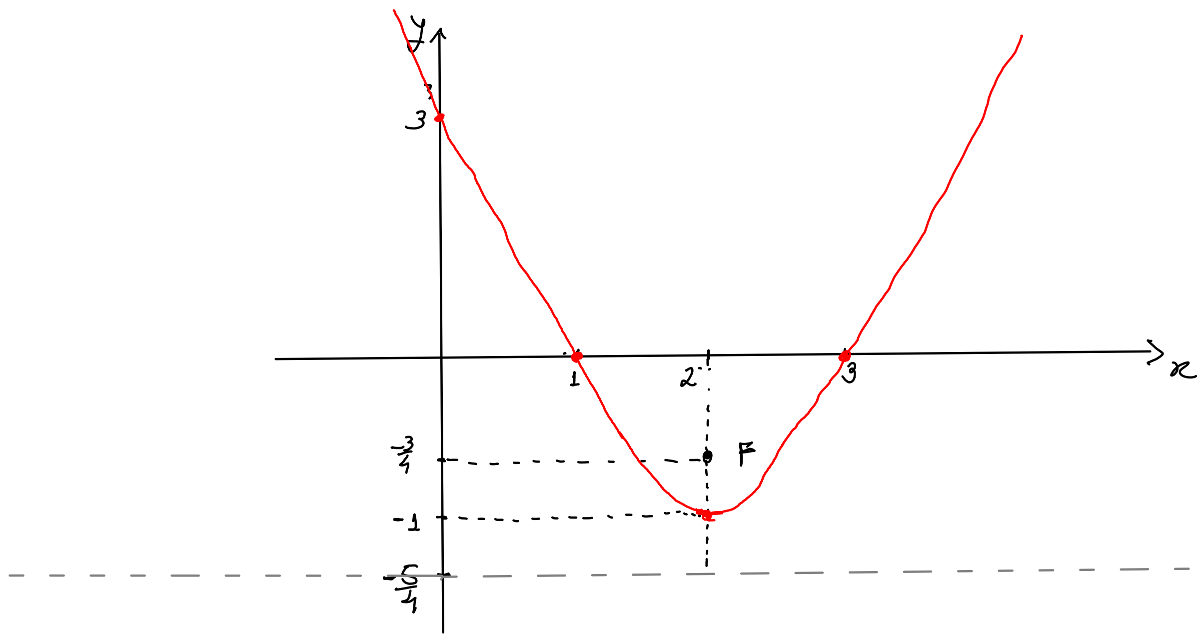
Sabemos que esta cônica é uma parábola transladada pelo vetor $(2,-1)$. Da equação canônica da parábola, $x^2=4py$, temos que

$$4p=1 \Rightarrow p=1/4$$

$$F=(0,p)+(2,-1)=(2,-3/4)$$

$$\ell:\ y=-p-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}.$$

Além disso, sabemos que essa equação tem raízes $x = 1$ e $x = 3$ e corta OY em $y = 3$. Logo



Questão 2:

(a) Sabemos que $\vec{v}_r = (-1, 1) \parallel r$ e que $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$ é um vetor diretor da reta por A e B. Assim, se θ é o ângulo entre r e a reta por A e B, temos que

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{v}_r\| \, \|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Note que: $\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{AB} = +1 - 3 = -2$, $\|\vec{v}_r\| = \sqrt{2}$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Assim,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(b) Note que $\vec{v}_s = (-2, 2) \parallel s$ e que

$$\vec{v}_s = (-2, 2) = 2(-1, 1) = 2\vec{v}_r, \text{ daí,}$$

$\vec{v}_s \parallel \vec{v}_r$, ou seja, r e s têm o mesmo vetor diretor. Neste caso, elas são paralelas ou coincidentes.

Substituindo $P = (2, 0) \in s$ na equação de r, temos

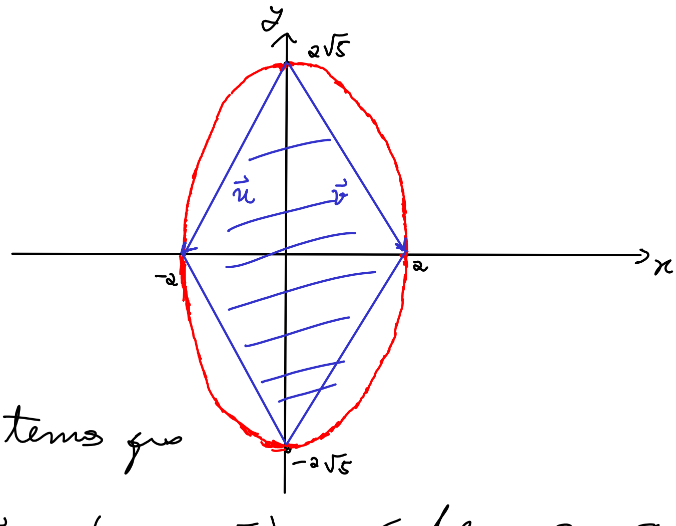
$$2 + 0 - 1 = 1 \neq 0,$$

Assim $P \notin r$ e portanto r e s são paralelas.

Questão 3: A elipse na forma canônica é:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

Assim temos que: $a = 2$, $b = 2\sqrt{5}$, $c = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$.



Da figura, temos que

$\vec{u} = (-2, -2\sqrt{5})$ e $\vec{v} = (2, -2\sqrt{5})$. Sabemos que a área o paralelogramo em azul é:

$$A = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}.$$

Como $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = 4 + 20 = 24$ e

$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (-4 + 20)^2 = 16^2$

Temos que:

$$A = \sqrt{24^2 - 16^2} = \sqrt{3^2 \times 8^2 - 2^2 \times 8^2} = 8\sqrt{9-4} = 8\sqrt{5}.$$

Questão 4:

(a) O L.G. dos pontos equidistantes de A e B é a reta que passa pelo ponto médio de A e B e é ortogonal a $\vec{AB}$. Como

$M_{AB} = (4, 8)$ e $\vec{AB} = (-4, 4) // (-1, 1)$ temos que a equação cartesiana da reta é da forma:

$$-x + y + c = 0.$$

Substituindo M_{AB}, temos que

$-4 + 8 + c = 0 \Rightarrow c = -4$. Logo a reta tem equação cartesiana

$$r: -x + y - 4 = 0$$

(b) Sabemos que

$$C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Assim os pontos de C equidistantes de A e B devem satisfazer a equação de C e de r do item anterior.

Do item (a) temos que

$$y = 4 + x.$$

Substituindo na eq. de C temos que

$$(x-1)^2 + (x+4-2)^2 = 9$$

$\Rightarrow x^2 - 2\cancel{x} + 1 + x^2 + 2\cancel{x} + 4 = 9$

$\Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Logo os pontos são:

$P_1 = (-\sqrt{2}, 4-\sqrt{2})$ e $P_2 = (\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$

Questão 5:

Sabemos que $r: x = 0$. Daí,

$d(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ e $d(P, r) = |x|$.

Com isso,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2|x|$$

$\Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 - y^2 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x - 3) - y^2 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3) - y^2 = 0$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 - 12 - y^2 = 0$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 - y^2 = 12$

5

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Esta equação representa uma hipérbole.