Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

VS de GA
20/07/2022 – 2022-1
Turma K1

Gabarito

Total de pontos: 10

Geometria Analítica Plana

1. [2 pts] Responda a cada um dos itens abaixo.
   (a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 25$ no plano? Quais são as informações que temos sobre este objeto.
   (b) Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (2, 0)$ e $B = (0, -3)$.
   (c) Qual é o coeficiente angular da reta $r : 2x - 3y = 6$?

Solução:
(a) O objeto representado pela equação é um círculo de centro $(1, 0)$ e raio 5.
(b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.
(c) Note que $y = \frac{2}{3}x - 2$, daí o coeficiente angular é $m = \frac{2}{3}$.

2. [2 pts] Coloque a cônica abaixo na forma padrão. Em seguida identifique-a e encontres seus focos e vértices.

$$9x^2 - 6x - 36y^2 - 144y - 179 = 0$$

Solução: Completando os quadrados:

$$\begin{aligned}
&9x^2 - 6x - 36y^2 - 144y - 179 = 0\\
\Rightarrow &9\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 36\left(y^2 + 4y\right) + 179 = 0\\
\Rightarrow &9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) - 36\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) - 179 = 0\\
\Rightarrow &9\left(x - \frac{1}{3}x\right)^2 - 1 - 36\left(y+2\right)^2 + 144 - 179 = 0\\
\Rightarrow &9\left(x - \frac{1}{3}x\right)^2 - 36\left(y+2\right)^2 - 36 = 0\\
\Rightarrow &\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{4} - (y+2)^2 = 1
\end{aligned}$$

Vemos que a cônica é uma hipérbole transladada. A mudança de coordenadas é dada por

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{3} \\ y = y' - 2. \end{cases}$$

Daí, temos que
Vértices: $V_1 = \left(\frac{7}{3},\ -2\right)$ e $V_2 = \left(-\frac{5}{3},\ -2\right)$
Focos: $F_1 = \left(\frac{1}{3} + \sqrt{3},\ -2\right)$ e $F_2 = \left(\frac{1}{3} - \sqrt{3},\ -2\right)$

Geometria Analítica Espacial

3. [2 pts] Responda a cada um dos itens abaixo.

(a) Qual é o nome do objeto geométrico representado pela equação $x + y = 25$ no espaço? Qual é a relação do vetor $\vec{u} = (1, -1, 3)$ com este objeto? Justifique.

(b) Qual é o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -6, 4)$ e $\vec{v} = (-3, 9, -6)$? Justifique.

(c) O ponto $P = (-1,\ 8,\ 2)$ pertence à reta $r : X = (1,\ 2,\ 0) + t\,(1,\ -3,\ -1)\,,\ t \in \mathbb{R}$? Justifique

(d) Obtenha o versor do vetor $\vec{u} = (1,\ -3,\ -1)$.

Solução:

(a) O objeto é um plano. Como $\vec{n} = (1, 1, 0)$ é um vetor normal ao plano e $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, temos que o vetor $\vec{v}$ é paralelo ao plano.

(b) Note que $\vec{u} = 2(1, -3, 2)$ e $\vec{v} = -3(1, -3, 2)$, daí, $\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{v}$. Portanto o ângulo eles é de π radianos.

(c) Fazendo $t = -2$ vemos que $X = (-1,\ 8,\ 2)$, portanto P pertence à reta.

(d) $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}\,(1,\ -3,\ -1) = \left(\frac{\sqrt{11}}{11},\ -\frac{3\sqrt{11}}{11},\ -\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$.

4. [4 pts] Determine as equações das esfera que são tangentes ao plano $\pi : x + 4y + 8z - \frac{160}{3} = 0$ e ao plano OXZ, cujos centros pertencem à reta $r : X = \left(0,\ \frac{40}{3},\ 0\right) + t\,(1,\ -3,\ 1)$.

Solução: Como o centro C da esfera pertence à reta r, temos que $C = \left(t,\ \frac{40}{3} - 3t,\ t\right)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Como a esfera tangencia o plano OXZ, temos que seu raio R é dado pela distância de C ao plano OXZ, isto é,

$$R = d(C, OXZ) = \left|3t - \frac{40}{3}\right|.$$

Da mesma forma,

$$R = d(C, \pi) = \frac{|t|}{3}.$$

Com isso, temos que

$$d(C, OXZ) = d(C, \pi) \Rightarrow \left|3t - \frac{40}{3}\right| = \frac{|t|}{3} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ou } t_2 = 5.$$

Donde, temos que

$$C_1 = \left(4,\ \frac{4}{3},\ 4\right) \text{ ou } C_2 = \left(5,\ -\frac{5}{3},\ 5\right)$$

e

$$R_1 = \frac{4}{3} \text{ ou } R_2 = \frac{5}{3}.$$

Logo, as esferas são dadas pelas equações

$$(x-4)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-4)^2 = \frac{16}{9}$$

e

$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 + (z-5)^2 = \frac{25}{9}.$$

- Espaço reservado para Rascunho -