Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras – CURO

1ª Prova de GA
18/05/2022 – 2022-1
Turma K1

Instruções

- A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação.
- Responda cada questão de maneira clara e organizada.
- Resultados sem justificativas não serão considerados.
- Uma questão com mais de uma solução terá nota zero.
- Os celulares devem ser mantidos desligados.
- Resposta final correta com solução incorreta terá nota zero.
- Não é permitido o compartilhamento de material.
- Não é permitido sair da sala (tomar água, ir ao banheiro e etc) sem entregar definitivamente a avaliação.
- Aos alunos envolvidos em algum tipo de fraude, mesmo que identificada posteriormente, será atribuído nota zero na prova.

Quest.	Pts	Bonus:	N
1	3	0	
2	3	0	
3	4	0	
Total:	10	0	

Nome: GABARITO

1. [3 pts] Identifique a cônica abaixo e faça um esboço.

$$x^2 + 6x + 4y^2 - \frac{8y}{3} + \frac{49}{9} = 0$$

2. Considere o ponto $A = (1, -2)$ e a reta $r : X = (-1, 1) + t(1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) [1 pt] Determine a equação cartesiana da reta s perpendicular a r passando por A.
   (b) [2 pts] Encontre os pontos de r que estão à distância $\sqrt{5}$ da reta s.

3. [4 pts] Determine os centros e raios dos círculos que são tangentes ao eixo OY e à reta $r : 3x - 4y = 1$ e cujos centros pertencem à reta $s : x - 2y = -1$.

Questão 1: completando quadrados

$$x^2+6x+4y^2-\frac{8y}{3}+\frac{49}{9}=0$$

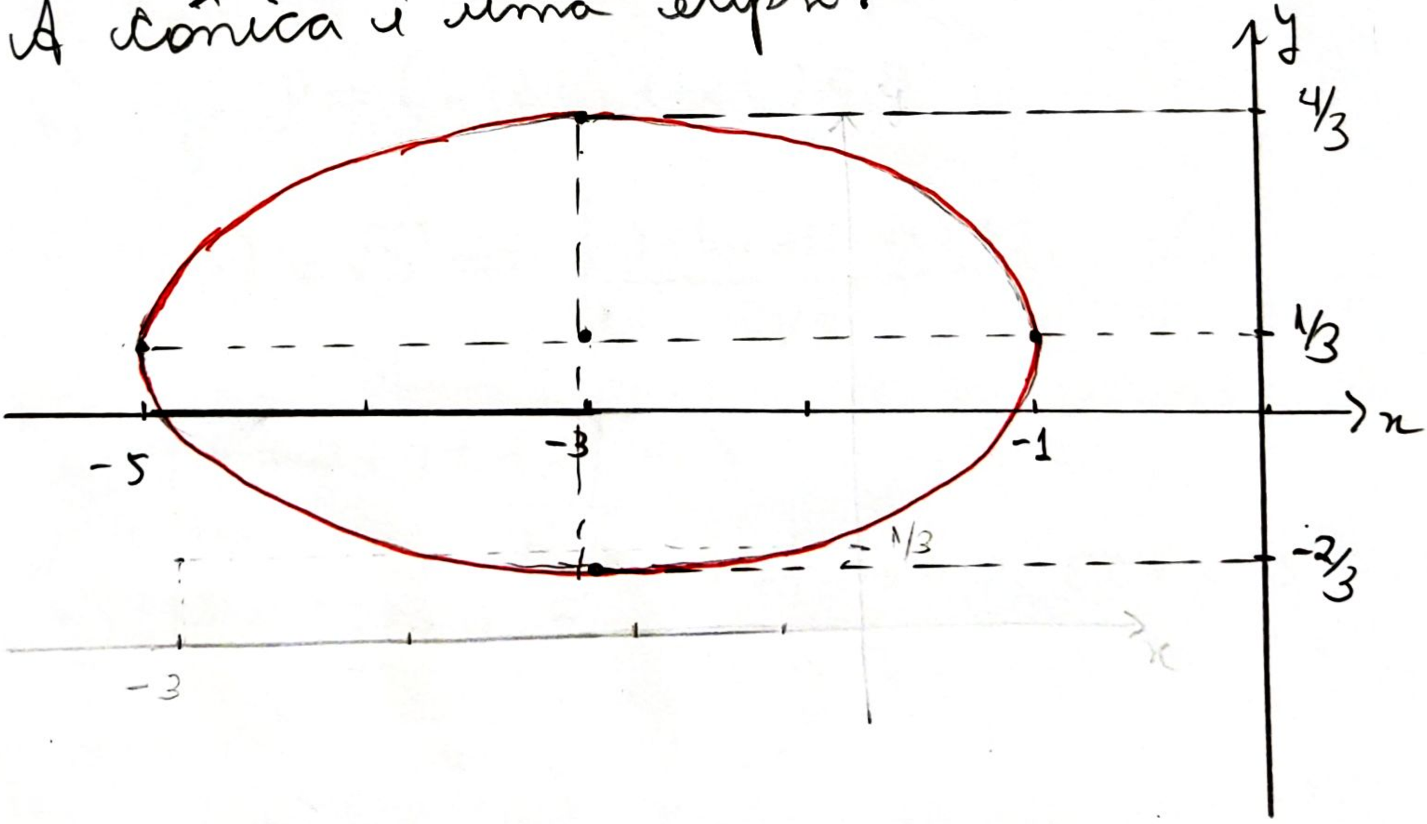
$$\Rightarrow x^2+6x+9-9+4\left(y^2-\frac{2y}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+\frac{49}{9}=0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2+4\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{49}{9}-9=0$$

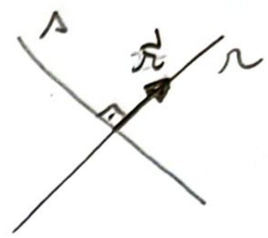
$$\Rightarrow (x+3)^2+4(y-1/3)^2=4$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-\frac{1}{3})^2}{1}=1$$

A cônica é uma elipse.



Questão 2:



a) $\vec{n} = (1,2) \parallel r$ e $s \perp r \Rightarrow \vec{n} \perp s$

Com isso, s é da forma

$$s: x+2y+c=0.$$

Substituindo A em s, temos:

$$1-4+c=0 \Rightarrow c=3 \text{, logo}$$

$$s: x+2y+3=0.$$

b) Seja $P=(-1+t, 1+2t) \in r$.

$$d(P,s)=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|-1+t+2(1+2t)+3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |t+2+4t+2| = 5$$

$$\Rightarrow |5t+4| = 5 \Rightarrow 5t+4 = \pm 5 \Rightarrow 5t = 4 \pm 5$$

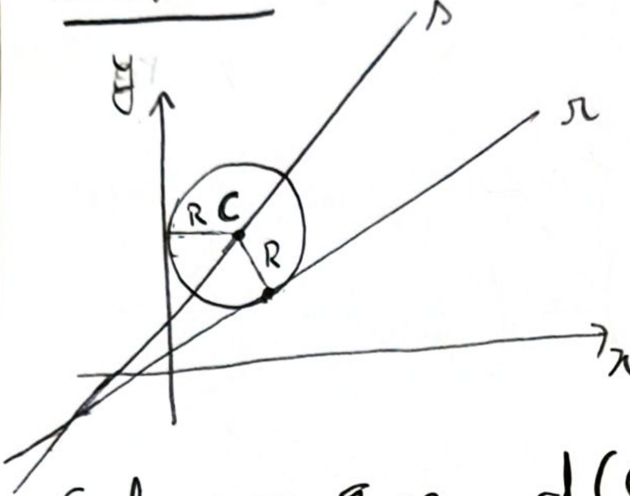
$$\Rightarrow t = \frac{-4\pm 5}{5} \Rightarrow t = \frac{-9}{5} \text{ ou } t = \frac{+1}{5}.$$

Com isso,

$$P = \left(-1 - \frac{9}{5},\ 1 - \frac{18}{5}\right) = \left(\frac{-14}{5},\ \frac{-13}{5}\right) \text{ ou}$$

$$P = \left(-1 + \frac{1}{5},\ 1 + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{-4}{5},\ \frac{7}{5}\right).$$

Questão 3:



Seja C o centro do círculo buscado. Como $C \in s$ e fazendo $y = t$ em s, temos que $C = (2t-1, t)$ para algum t.

Sabemos que $d(C, Oy) = d(C, r) = R$, onde R é o raio do círculo.

Note que

$$d(C, Oy) = |2t-1| \quad \text{e}$$

$$d(C, r) = \frac{|3(2t-1) - 4t - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6t-3-4t-1|}{5}$$

$$\Rightarrow 5|2t-1| = |2t-4|$$

$$\Rightarrow 10t - 5 = 2t - 4 \quad \text{ou} \quad 10t - 5 = -2t + 4$$

$$\Rightarrow 8t = 1 \quad \text{ou} \quad 12t = 9$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad t = \frac{3}{4}$$

Com isso,

$$C = \left(\frac{1}{4} - 1, \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{8}\right) \text{ e } R = \frac{3}{4}$$

ou

$$C = \left(\frac{3}{2} - 1, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ e } R = \frac{1}{2}$$