UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
POLO UNIVERSITÁRIO DE RIO DAS OSTRAS
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

NOTAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA E CÁLCULO VETORIAL

RIO DAS OSTRAS
RIO DE JANEIRO - BRASIL
2012

Sumário

Capítulo

1

Geometria Analítica Plana

1.1 Coordenadas no Plano

Em um plano, fixado uma unidade de medida, sempre podemos medir a distância entre dois pontos. Assim, dados dois pontos A e B quaisquer denotaremos por $\overline{AB}$ o segmento de reta determinado por eles e por $d(A, B)$ a distância entre estes pontos. Sabemos que a distância satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(A, B) \geq 0$;
2. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
3. $d(A, B) = d(B, A)$;
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C.$

A última propriedade é conhecida como **desigualdade triangular** e a igualdade ocorre se, e somente se, C é um ponto do segmento determinado por A e B.

Em um plano, dizemos que uma reta r é **orientada** quando escolhemos sobre ela um sentido de percurso, chamado **positivo** . O sentido oposto sobre a reta r é dito **negativo**. Numa reta, diz-se que um ponto B está à direita do ponto A quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

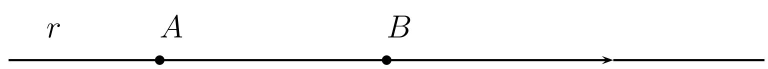


Figura 1.1: Escolha de um sentido de percurso na reta r

Um **eixo** E é uma reta orientada na qual é escolhido um ponto O, chamado **origem**.

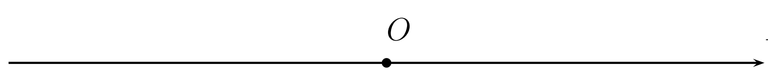


Figura 1.2: Eixo E com origem O.

A noção de distância permite introduzir coordenadas sobre um eixo, ou seja, representar os pontos da reta por meio de números reais de uma forma parecida com o que fazemos com uma régua.

À origem O do eixo faz-se corresponder o número zero. A Cada ponto X de E situado à direita de O faz-se corresponder o número real positivo $x = d(O, X)$. A cada ponto X' situado à esquerda da origem faz-se corresponder o número real negativo $x' = -d(O, X')$.

O número real a, que corresponde a um ponto A do eixo E da maneira acima indicada, chama-se **coordenada** desse ponto.

Com estes simples conceitos apresentados até agora é possível descrever um plano, um objeto puramente geométrico, de forma algébrica e, a partir daí, usar a álgebra como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas geométricos. Passemos à essa descrição.

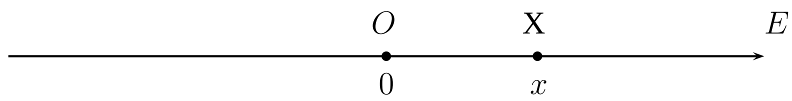


Figura 1.3: Eixo E com origem O.

Imaginemos sob nossos pés uma superfície perfeitamente plana que se estende em todas as direções sem limites. Isto é a noção primitiva de plano. Um **sistema de coordenadas ortogonais (ou cartesianas)** OXY em um plano π consiste num par de eixos perpendiculares contidos nesse plano, com a mesma origem O. Denotamos um dos eixos por OX e o chamamos de eixo das **abcissas** , e denotamos o outro eixo por OY e o chamamos de eixo das **ordenadas**.

Em um plano π, escolhido um sistema de coordenadas ortogonais como acima, podemos associar de forma única a cada ponto um par de números reais, da seguinte forma:

- Para um ponto A sobre o eixo OX, o par de números que lhe corresponde é $(a, 0)$, onde a é a coordenada de A no eixo OX, conforme definido anteriormente.

- Para um ponto B sobre o eixo OY, o par de números que lhe corresponde é $(0, b)$, onde b é a coordenada de B no eixo OY, conforme definido anteriormente.

- Para um ponto P, que não está em qualquer dos eixos, traçamos por ele uma paralela ao eixo OY, a qual corta OX no ponto de coordenada x e, em seguida, traçamos uma paralela ao eixo OX, a qual corta o eixo OY no ponto de coordenada y, então o par de número que corresponde a P é (x, y).

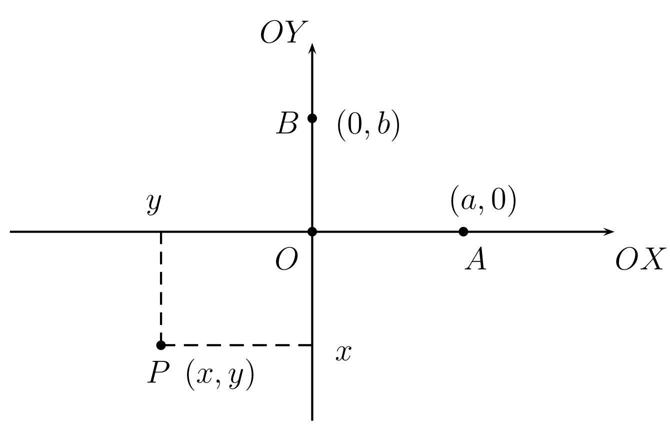


Figura 1.4: Sistema de eixos ortogonais.

Reciprocamente, a cada par de números podemos associar um único ponto do plano. Além disso, podemos notar que ao par (x, y) está associado um ponto diferente do par (y, x). Com isso dizemos que o conjunto dos pares ordenados

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

está em correspondência biunívoca com o plano π.

O conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares ordenados de números reais, não é a mesma coisa que o plano π, cujos elementos são pontos. Entretanto vimos que quando fixamos um sistema de coordenadas ortogonais podemos colocá-los em correspondência biunívoca. Neste caso, usaremos essa correspondência para identificar cada ponto P do plano com o par ordenado que lhe corresponde escrevendo $P = (x, y)$ para simbolizar essa identificação.

Os eixos ortogonais decompõem o plano π em quatro regiões, cada uma das quais chamada de **quadrante** , da seguinte forma:

1º Quadrante: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0$ e $y \geq 0\}$

2º Quadrante: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0$ e $y \geq 0\}$

3º Quadrante: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0$ e $y \leq 0\}$

4º Quadrante: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0$ e $y \leq 0\}$

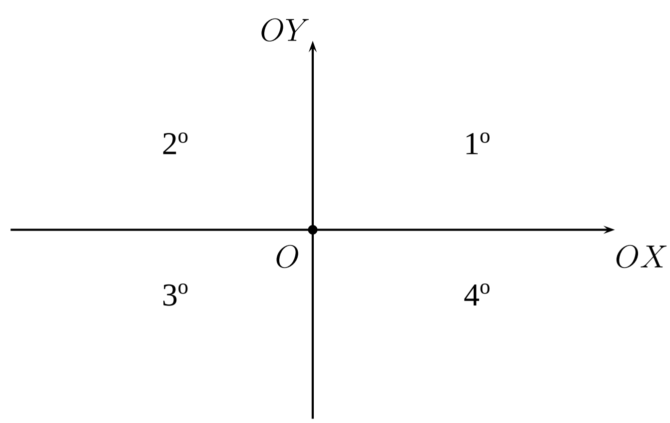


Figura 1.5: Quadrantes do plano.

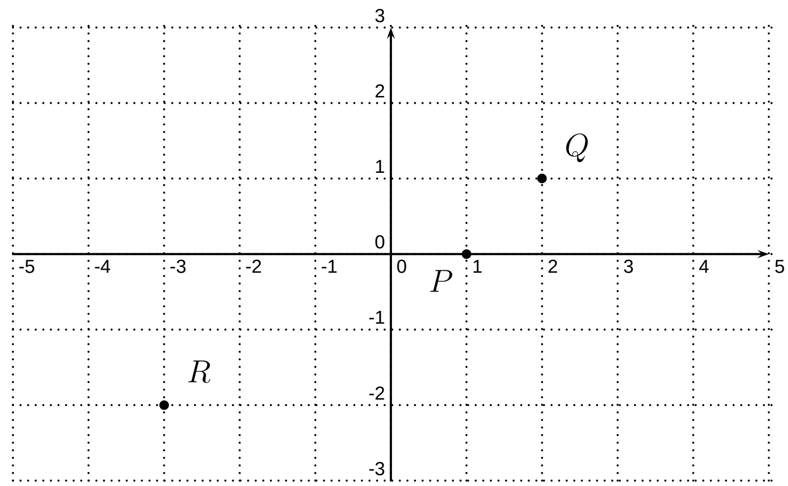
Exemplo 1.1.1. *Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas OXY, represente:*

a) Os pontos $P = (1, 0)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (-3, -2)$.

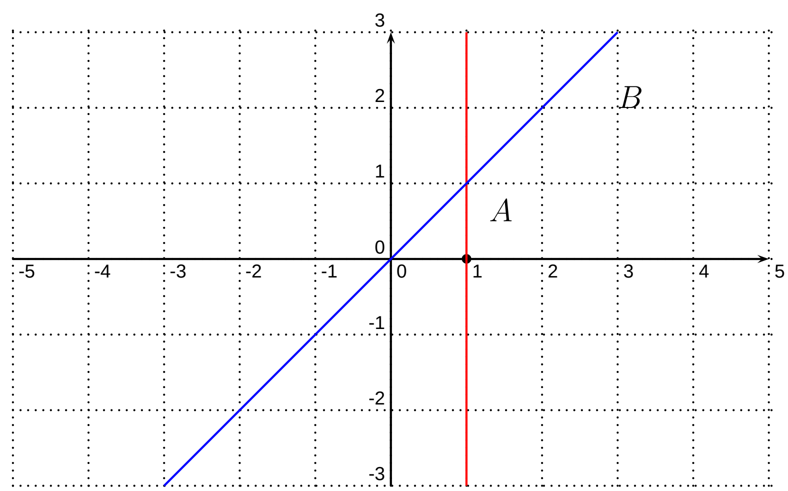
b) Os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$.

Solução:

a) Os pontos P, Q e R estão representados abaixo.



b) Note que o conjunto A são todos os pontos do plano que tem coordenadas $x = 1$, portanto uma reta vertical passando pelo ponto $(1, 0)$. Já o conjunto B é formado por todos os pontos que tem a primeira coordenada igual à segunda, portanto é uma reta que divide o 1ºe o 3ºquadrantes ao meio.

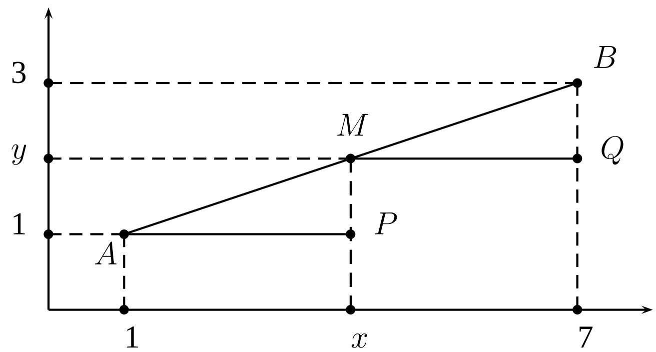


■

Vejamos agora um exemplo de como exprimir um fato geométrico de forma analítica.

Exemplo 1.1.2. *Determine as coordenadas do ponto médio do segmento determinado pelos pontos* $A = (1, 1)$ *e* $B = (7, 3)$.

Solução: Para resolver esse problema usaremos de alguns fatos da Geometria Plana. Denotemos por $M = (x, y)$ o ponto médio do segmento determinado pelos pontos A e B. Considere os pontos P e Q como na figura abaixo. Da construção vemos que os triângulos MAP e BMQ são retângulos cujas hipotenusas $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ têm o mesmo comprimento, já que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Além disso, como os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{MQ}$ são paralelos, temos que os ângulos $\widehat{MAP}$ e $\widehat{BMQ}$ são congruentes. Portanto os triângulos MAP e BMQ são congruentes. Com isso, os lados $\overline{AP}$ e $\overline{MQ}$ têm mesmo comprimento. Daí, a coordenada x é o ponto médio entre 1 e 7, ou seja, $x = 4$. Da mesma forma vemos que a coordenada $y = 2$. Logo o ponto médio é $M = (4, 2)$.



Com o mesmo argumento deste último exemplo podemos mostrar que dados pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ o ponto médio do segmento AB é o ponto $M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

■

1.1.1 A distância entre dois pontos

Seja π um plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas OXY. Se conhecermos as coordenadas dos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ como podemos determinar a distância entre estes pontos ?

Se A e B têm a mesma ordenada, ou seja, $a_2 = b_2$, então o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo OX e portanto $d(A, B) = |b_1 - a_1|$. Analogamente, se A e B têm mesma abcissa, então $d(A, B) = |b_1 - a_2|$.

Se, entretanto, A e B têm abcissas e ordenadas distintas então, considerando o ponto $P = (b_1, a_2)$, vemos que APB é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento $\overline{AB}$. Neste caso sabemos que

$$d(A, P) = |b_1 - a_1| \quad \text{e} \quad d(P, B) = |b_2 - a_2|.$$

Pelo Teorema de Pitágoras vemos que

$$d(A, B)^2 = d(A, P)^2 + d(P, B)^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

Logo

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

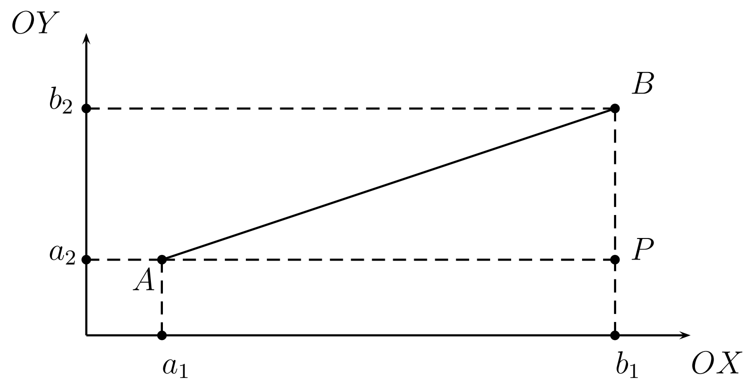


Figura 1.6: Distância entre os pontos A e B.

Um caso particular interessante da fórmula de distância entre dois pontos obtida é a distância entre um ponto qualquer $P = (x, y)$ e a origem $O = (0, 0)$ que é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Note que a fórmula de distância entre dois pontos coincide com os casos em que os pontos têm mesma abcissas ou ordenadas. De fato, se $a_1 = b_1$ então

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(b_2 - a_2)^2} = |b_2 - a_2|.$$

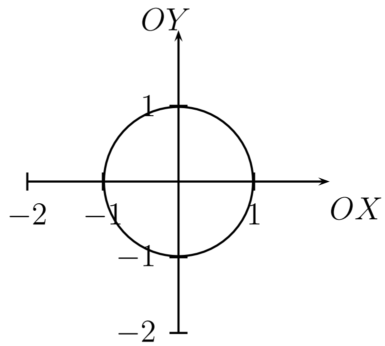
O mesmo ocorre quando $a_2 = b_2$.

A fórmula de distância entre dois pontos é a primeira ferramenta algébrica que nos permitirá resolver uma grande quantidade de problemas da geometria. Vejamos alguns exemplos a fim de mostrar o poder dessa nova ferramenta.

Exemplo 1.1.3. *Represente o seguinte conjunto no plano cartesiano*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Solução: Um ponto $P = (x, y)$ pertence ao conjunto A se, e somente se, $x^2 + y^2 = 1$. Com isso, note que $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, daí, concluímos que os pontos do conjunto A são todos os pontos do plano cuja distância até a origem do sistema de coordenadas é sempre 1, ou seja, o conjunto A é formado pelos pontos do círculo de centro na origem e raio 1.



■

Raciocinando da mesma forma vemos que o círculo de centro em um ponto $A = (a, b)$ e raio r é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Exemplo 1.1.4. *Fixado um ponto $P = (x_0, y_0)$ determinar a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$.*

Solução: Seja r a reta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento $\overline{OP}$. Um ponto $Q = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, o triângulo POQ é retângulo. Com isso, do Teorema de Pitágora, o ponto $Q = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 = d(P,Q)^2.$$

Aplicando a fórmula de distância, temos que

$$x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2$$

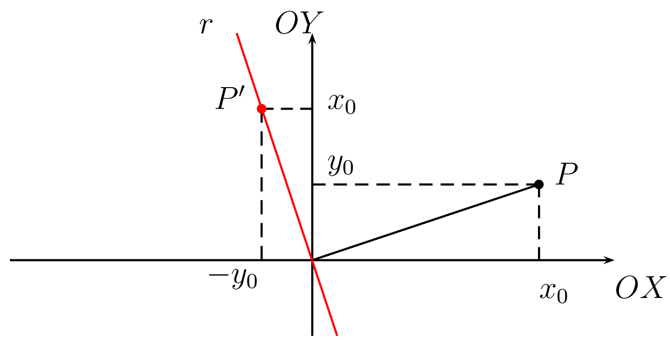
Simplificando obtemos que

$$xx_0 + yy_0 = 0$$

Logo, a reta r é o seguinte conjunto

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xx_0 + yy_0 = 0\}.$$

Um ponto que está na reta r é o ponto $P' = (-y_0, x_0)$, pois $-y_0x_0 + x_0y_0 = 0$. Podemos ver que o segmento $\overline{OP'}$ é a rotação do segmento $\overline{OP}$ de um ângulo de 90^{o}no sentido anti-horário. Da mesma forma vemos que o ponto $P'' = (y_0, -x_0)$ está na reta r e o segmento $\overline{OP''}$ é a rotação do segmento $\overline{OP}$ de um ângulo de 90^{o}no sentido horário.



■

1.1.2 Exercícios

1. Determine a distância entre os pontos P e Q:

   a) $P = (1, 3)$ e $Q = (2, 4)$.

   b) $P = (1, 3)$ e $Q = (-1, 2)$.

   c) $P = (2, -4)$ e $Q = (-2, 3)$.

   d) $P = (1/2, -2/3)$ e $Q = (-5/2, 4/3)$.

   e) $P = (\sqrt{3}, 1)$ e $Q = (\sqrt{6}, 2)$.

   f) $P = (\pi, 1)$ e $Q = (2, 3)$.

2. Calcule a área e o perímetro do triângulo cujos vértices são $A = (-1, 3)$, $B = (1, 0)$ e $C = (5, 0)$.

3. Determine a equação para os pontos do plano equidistantes de $P = (1, -2)$ e $Q = (3, 4)$.

4. Um ponto $P = (x, y)$ do plano se move de maneira que a soma dos quadrados das suas distâncias aos pontos $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ é sempre igual a 5. Encontre uma equação que relaciona as coordenadas x e y do ponto P, determinando o **lugar geométrico** descrito pelo ponto P. Você consegue representar este conjunto no plano?

5. Para cada uma das equações abaixo esboce no plano OXY o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem essa equação:

   a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

   b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;

   c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

   d) $|x| + y = 0$;

   e) $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7y + 6) = 0$;

   f) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$;

   g) $x^3 + x - x^2y - y = 0$;

   h) $x^2 + y^2 = x$;

   i) $x^2 + y^2 + y = 0$;

   j) $x^2 + y^2 + x + y = 1$

   k) $x^3 + xy^2 - x^2y - x + y - y^3 = 0$;

6. Esboce o conjunto $X = \{(x, y); |y| \leq x \leq 3\}$.

7. Em cada um dos casos abaixo, esboce o conjunto dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem as condições especificadas:

   a) $|x - 3| < 1$;

   b) $|x - 3| = 1$;

   c) $|x - 3| \leq 1$ e $|y - 2| \leq 5$;

   d) $|x - 3| \leq 1$ e $|y - 2| \leq 5$;

   e) $|x| \geq 2$ e $|y| \geq 3$;

   f) $xy = 0$;

   g) $x > y$;

   h) $x \geq y$;

   i) $0 \leq x \leq y \leq 1$;

   j) $x^2 < y^2$;

   k) $x^2 \leq y^2$;

8. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos $(1, 3)$ e $(5, 1)$.

9. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo OX e do ponto $(0, 2)$.

10. São dados dois pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 1)$. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(A, P)^2 + d(B, P)^2 = k^2$ onde K é uma constante dada. Determine para que valores de k o problema tem solução.

1.2 Vetores no Plano

A fim de motivar o estudo de vetores vamos enunciar um problema recreativo, retirado de [3], e que mais a frente veremos como o conceito de vetor nos permitirá resolver facilmente tal problema.

O Problema do Tesouro

Recentemente foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções.

> "... qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei de A e B e também uma palmeira, que chamarei de C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado da seguinte forma.
>
> Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M.
>
> Volte ao ponto C.
>
> Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.
>
> O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois ponto."

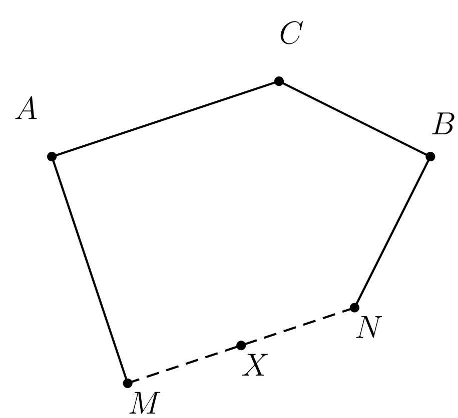


Figura 1.7: Mapa do Tesouro.

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram à referida ilha mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos (A e B) lá estavam, mas a palmeira (C) tinha desaparecido completamente.

O tesouro estava perdido.

Entretanto, fazia parte da comitiva, o matemático Augusto Wagner Carvalho que, após breves cálculos, conseguiu descobrir o tesouro e, naturalmente, reivindicou para si sua posse.

Como ele fez isso?

Para resolver este problema e muitos outros precisamos do conceito de vetores. Passemos agora à formalização deste conceito.

Definição 1.1. *Um **segmento de reta orientado** é um segmento no qual se escolheu um dos seus pontos extremos para ser o ponto inicial. Dados dois pontos A e B denotamos por AB, o segmento orientado cujo ponto inicial é o ponto A. O ponto A é dito **origem** e o ponto B é dito **extremidade**. Representaremos um segmento de reta orientado no plano por uma seta com a ponta da seta na extremidade do segmento orientado.*

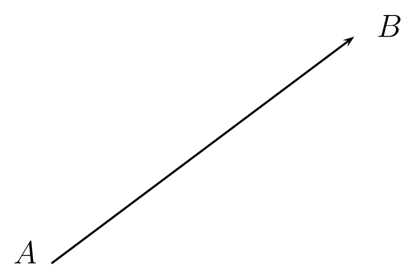


Figura 1.8: Segmento de reta orientado AB

Observe que um segmento de reta $\overline{AB}$ define dois segmentos de reta orientados diferentes, AB e BA.

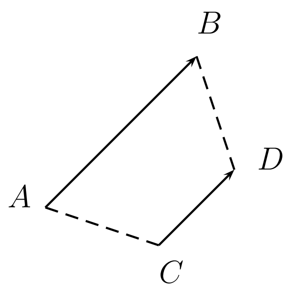
Definição 1.2. *O **comprimento** de um segmento orientado AB é a distância do ponto A ao ponto B. Esta medida será denotada por $|AB|$ ou por $d(A, B)$.*

Definição 1.3. *Dizemos que dois segmentos de reta orientados têm mesma **direção** quando as retas que os contém são paralelas.*

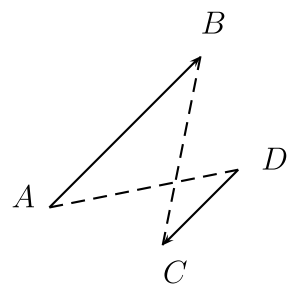
Definição 1.4. *Dados dois segmentos orientados AB e CD com mesma direção.*

*i) Se AB e CD estão sobre retas distintas, dizemos que têm **mesmo sentido** se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não se intersectam. Caso contrário dizemos que têm **sentidos opostos**.*

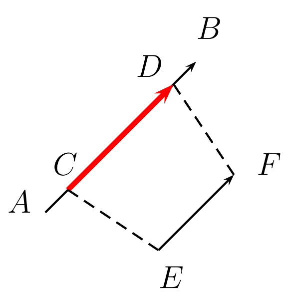
*ii) Se AB e CD estão sobre a mesma reta r, então tomemos um segmento orientado EF fora da reta r e de mesmo sentido de AB, de acordo com o item anterior. Neste caso dizemos que AB e CD têm **mesmo sentido** se CD e EF têm mesmo sentido. Caso contrário dizemos que têm **sentidos opostos**.*



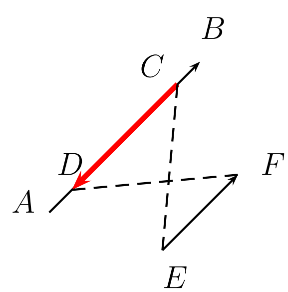
mesmo sentido



sentidos opostos



mesmo sentido



sentidos opostos

Definição 1.5. *Dois segmentos orientados são ditos* ***equipolentes*** *quando têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.*

Se os segmentos orientados AB *e* CD *são equipolentes, escrevemos* $AB \equiv CD$. *Caso contrário, escrevemos* $AB \not\equiv CD$.

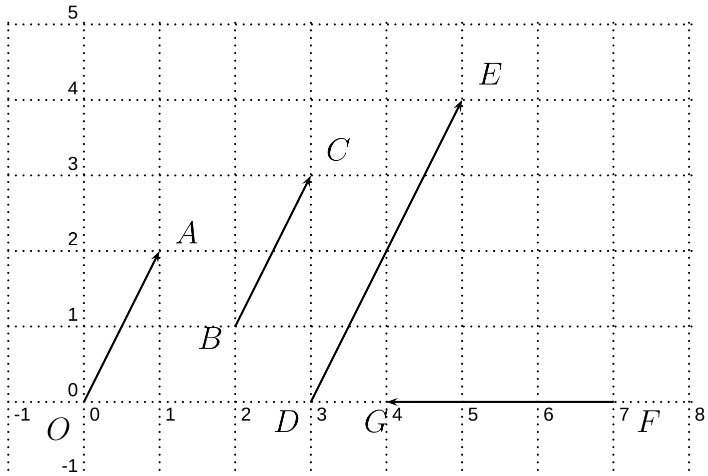
Um segmento AB *onde* $A = B$ *é chamado um* ***segmento nulo*** *. Os segmentos nulos têm comprimento zero e não têm direção nem sentido. Todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.*

Exemplo 1.2.1. *Considere os pontos* $O = (0,0)$, $A = (1,2)$, $B = (2,1)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$, $E = (5,4)$, $F = (7,0)$ *e* $G = (4,0)$.

a) Desenhe no plano os segmentos orientados OA, BC, DE *e* FG.

b) Quais desses segmentos são equipolentes?

Solução:



Devemos verificar quais pares de segmentos têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Pela figura podemos notar que o segmento FG não pode ser equipolente a nenhum dos outros, visto que não é paralelo a nenhum deles, portanto não tem a mesma direção.

Podemos ver que $d(O, A) = (\sqrt{5})$, $d(B, C) = \sqrt{5}$ e $d(D, E) = 2\sqrt{5}$. Com isso, o segmento DE não pode ser equipolente a OA e nem a BC pois não tem o mesmo comprimento que os demais.

Resta verificar se OA e BC são equipolentes. Para isso considere o quadrilátero $OACB$. Sabemos, da Geometria Plana, que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, as suas diagonais cortam-se mutuamente ao meio, ou seja, se suas diagonais têm o mesmo ponto médio. Como no exercício 1.1.2 podemos ver que as diagonais OC e AB têm o mesmo ponto médio $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2.}\right)$, logo $OACD$ é um paralelogramo e portanto OA e BC têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, ou seja, são equipolentes.

■

O mesmo argumento usado para mostrar que os segmentos OA e BC são equipolentes pode ser aplicado para um par de segmentos orientados quaisquer que estão sobre retas distintas. No caso em que os segmentos estão sobre a mesma reta o argumento é um pouco diferente, mas ainda vale o mesmo resultado, ou seja, basta olhar para o ponto médio dos segmentos determinados pelas extremidades. Em resumo temos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser vista em [2].

Proposição 1.6. *Sejam A, B, C e D pontos do plano (colineares ou não). Então,*

$AB \equiv CD$ *se, e somente se,* AD *e* BC *possuem o mesmo ponto médio.*

Desta proposição podemos obter uma caracterização algébrica que nos permite determinar facilmente quando dois segmentos orientados são equipolentes.

Proposição 1.7. *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ pontos no plano cartesiano, então:*

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

Demonstração: De fato, sejam M_{AD} e M_{BC} os pontos médios de AD e BC respectivamente. Da Proposição 1.6 temos que $AB \equiv CD$ se, e somente se, $M_{AD} = M_{BC}$, ou seja,

$$\left(\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right).$$

Daí,

$$a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \quad \text{e} \quad a_2 + d_2 = b_2 + c_2.$$

Portanto,

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2.$$

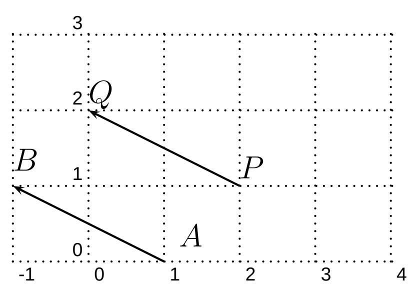
□

Exemplo 1.2.2. *Sejam $A = (1, 0)$, $B = (-1, 1)$ e $P = (2, 1)$ pontos do plano. Determine o ponto $Q = (x, y)$, tal que $PQ \equiv AB$.*

Solução: Da Proposição 1.7 $PQ \equiv AB$ se, e somente se,

$$(x - 2, y - 1) = (-1 - 1, 1 - 0) = (-2, 1).$$

Daí, $x = 0$ e $y = 2$. Logo $Q = (0, 2)$.



■

Agora estamos preparados para definir o conceito de vetor.

Definição 1.8. *Um **vetor** no plano é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado dado. Se AB é um segmento orientado, o vetor que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes a AB é designado por $\overrightarrow{AB}$. Qualquer segmento orientado equipolente a AB é chamado um **representante** do vetor $\overrightarrow{AB}$. Os vetores são também escritos usando letras minúsculas com uma flecha, como $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e etc.*

Observe que um vetor e segmento orientado não são a mesma coisa. Um segmento orientado podemos desenhar no plano através de uma flecha, já o vetor não pode ser representado pois ele é a coleção de todos os segmentos orientados equipolentes entre si. O que deve ficar claro é que se AB e CD são equipolentes então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais.

O conceito de vetor, devido a sua formalização abstrata, pode parecer confuso no início, mas com a prática vai se tornando natural. Um outro conceito matemático que estamos familiarizados e que tem o mesmo tipo de construção é o conceito de fração. Sabemos que as frações $1/2,\ 2/4,\ 3/6,\ 4/8, \ldots$ são equivalentes e usamos a primeira para representar todas as outras. O conceito de equivalência de frações é análogo ao de segmentos equipolentes. As frações $1/2$ e $2/4$ são equivalentes, mas usamos aquela que for mais conveniente ao nosso problema. Por exemplo, se em uma receita preciso usar 1/2 xícara de leite e em minha casa disponho apenas de um copo que corresponde à 1/4 de xícara então uso dois copos destes, pois sei que 2/4 é equivalente a 1/2. Do mesmo modo, o conceito de vetor é trabalhado. Se conheço um segmento orientado, então o vetor representado por este segmento contém todos os segmentos equipolentes a ele, daí, dependendo do problema uso o que for mais apropriado, ou seja, posso usar qualquer outro segmento que tenha o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido, não importando em que posição ele esteja.

Vimos na Proposição 1.7 que se AB e CD são equipolentes então a difença entre as coordenadas do extremo e da origem de cada segmento é a mesma para ambos os segmentos. Assim, dado um vetor $\overrightarrow{v}$, qualquer dos seus representantes que tomarmos e fizermos a diferença entre as coordenadas como na Proposição 1.7 sempre obteremos o mesmo resultado. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.9. *Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ pontos do plano. Dizemos que $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ são as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{AB}$, e escrevemos:*

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Assim como no caso dos pontos de um plano estamos fazendo uma correspondência biunívoca entre vetores e pares ordenados. Com isso, a partir de agora, um par ordenado por estar representando um vetor ou um ponto, dependendo do contexto.

Exemplo 1.2.3. *Sejam os pontos $A = (0, 1)$, $B = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e $C = (-1, 1)$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, o (único) ponto D, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e o ponto P, tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$.*

Solução: Pela Definição 1.9 temos que

$$\overrightarrow{AB} = \left(1 - 0, -\frac{1}{2} - 1\right) = \left(1, \frac{-3}{2}\right).$$

Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então têm as mesma coordenadas. Sendo $D = (x, y)$ temos que

$$\overrightarrow{CD} = (x+1, y-1) = \left(1, \frac{-3}{2}\right) \Rightarrow (x, y) = \left(0, \frac{-5}{2}\right).$$

Do mesmo modo, se $P = (x, y)$, então

$$\overrightarrow{OP} = (x-0, y-0) = \left(1-0, -\frac{1}{2}-1\right) \Rightarrow (x, y) = \left(1-0, -\frac{1}{2}-1\right).$$

Logo temos que $P = \left(1-0, -\frac{1}{2}-1\right)$ e $D = \left(0, \frac{-5}{2}\right)$.

$\blacksquare$

Observação: *Note que neste exemplo os segmento orientados AB, CD e OP apesar de serem diferentes representam o mesmo vetor, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP}$. Além disso as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ são as mesma do ponto P. Essa é uma característica geral, as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{v}$ são as coordenadas do ponto que é a extremidade do segmento orientado com a origem na origem do sistema cartesiano que o representa.*

1.2.1 Operações com vetores

A palavra vetor provém do latim *vehere*, que significa transportar. Podemos imaginar que um vetor translada os pontos do plano em uma direção e sentido e com uma certa intensidade, dada pelo comprimento do vetor. Neste caso, se o vetor $\overrightarrow{AB}$ leva o ponto A até B e o vetor $\overrightarrow{BC}$ leva o ponto B até o ponto C o resultado final seria o mesmo que levar diretamente o ponto A até o ponto C pelo vetor $\overrightarrow{AC}$. Motivados por essa ideia é que definimos a soma entre vetores.

Definição 1.10. *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano. A* ***soma*** *dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{w}$ obtido da seguinte forma. Tome A um ponto qualquer do plano, AB o representante de $\overrightarrow{u}$ e BC o representante do vetor v, o vetor $\overrightarrow{w}$ é o vetor representado pelo segmento orientado AC. Neste caso, denotamos*

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Observação: *Esta definição independe do ponto A tomado, ou seja, qualquer ponto que se tome no plano sempre obteremos o mesmo vetor, veja [2].*

Baseados em uma propriedade geométrica que queríamos que os vetores tivessem, transportar pontos, definimos o que é a soma de dois vetores. Com isso surge uma pergunta natural, se conhecermos as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quais são as coordenadas do vetor soma destes vetores? A próxima proposição responde a essa pergunta.

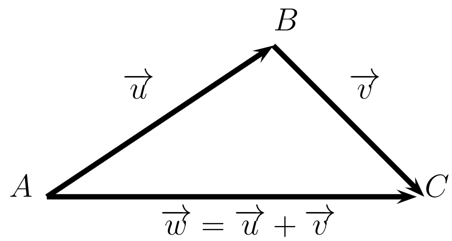


Figura 1.9: Soma de dois vetores

Proposição 1.11. *se* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$*, então*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Demonstração: Tome $A = (a_1, a_2)$ um ponto qualquer do plano. Seja $B = (b_1, b_2)$ tal que o segmento AB represente $\overrightarrow{u}$, ou seja, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Do mesmo modo tome $C = (c_1, c_2)$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Neste caso, pela definição de soma de vetores temos que

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2). \tag{1.1}$$

Queremos escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}$ em função de u_1, u_2, v_1 e v_2.

Sabemos que $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $(c_1 - b_1, c_2 - b_2) = (v_1, v_2)$, daí,

$$a_1 = b_1 - u_1, \ \ a_2 = b_2 - u_2$$
$$c_1 = v_1 + b_1, \ \ c_2 = v_2 + b_2$$

Substituindo a_1, a_2, c_1, c_2 em (1.1) obtemos que

$$\overrightarrow{w} = ((v_1 + b_1) - (b_1 - u_1), (v_2 + b_2) - (b_2 - u_2)) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

□

Com isso vimos que se conhecermos as coordenadas dos vetores, então as coordenadas do vetor soma são simplesmente as somas das coordenadas! Não é surpreendente como uma definição geométrica de soma de vetores resulte em uma expressão algébrica tão simples?

Exemplo 1.2.4. *Sejam* $A = (-1, 0)$*,* $B = (2, -1)$ *e* $C = (1, 2)$*. Determine* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$*.*

Solução: Sabemos que $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 2)$, daí,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3, -1) + (2, 2) = (5, 1).$$

■

Uma outra forma geométrica de ver a soma de dois vetores é a chamada **regra do paralelogramo**. Dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, tome A um ponto qualquer e sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja D o ponto que faz do quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo, então a soma de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ representado pela diagonal do paralelogramo.

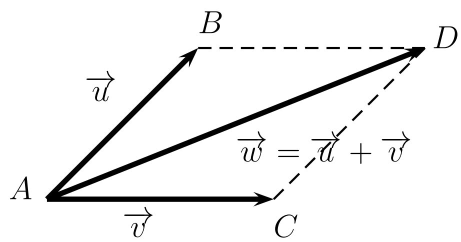


Figura 1.10: Regra do paralelogramo

Para ver que a regra do paralelogramo nos fornece realmente o vetor soma basta ver que, pela contrução, o segmento de reta BD é equipolente ao segmento AC, assim $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, daí, pela definição temos que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Como cada coordenada do vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é a soma das coordenadas correspondentes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ então a soma de vetores herdam, da soma de números reais, as seguintes propriedades.

Proposição 1.12. *Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores quaisquer. Valem as propriedades:*

1. ***Comutatividade:*** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

2. ***Vetor nulo:*** *O vetor nulo, denotado por $\overrightarrow{0}$, é o vetor representado por qualquer segmento nulo e satisfaz*
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}.$$

3. ***Simétrico:*** *Para todo vetor $\overrightarrow{u}$ existe um vetor, denotado por $-\overrightarrow{u}$ e chamado simétrico, tal que*
$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}.$$

4. ***Associatividade:*** $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

Outra operação é a multiplicação de um vetor por um número real. Geometricamente multiplicar um vetor por um número significa alterar o seu comprimento ou sentido sem modificar a direção. Baseados nessa ideia surge a seguinte definição.

Definição 1.13. *Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos o **produto de** λ **por** $\overrightarrow{u}$ com sendo o vetor $\lambda\overrightarrow{u}$, representado pelo segmento AB' de modo que:*

1. *A, B, e B' são colineares;*

2. *$|AB'| = |\lambda||AB|$;*

3. *AB e AB' tem o mesmo sentido se $\lambda > 0$, sentidos opostos se $\lambda < 0$.*

Novamente, a definição independe da escolha dos pontos A e B, ou seja, se tomarmos C e D tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD}$, então o vetor $\overrightarrow{CD'} = \lambda\overrightarrow{CD}$ obtido será o mesmo $\overrightarrow{AB'}$, veja [2]. Dado essa definição geométrica é natural perguntar quais são as coordenadas do produto de um vetor por um escalar?

Proposição 1.14. *Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.*

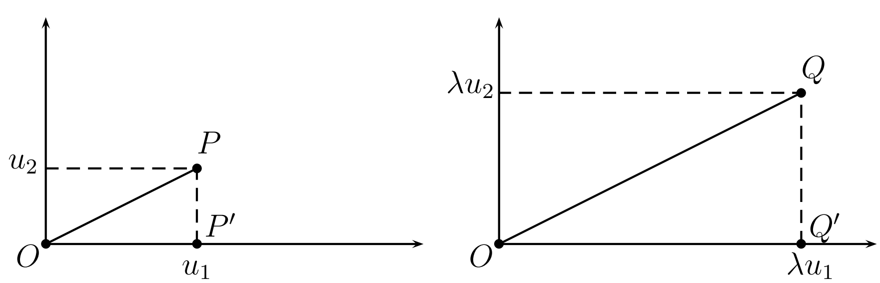
Demonstração: Considere os pontos $P = (u_1, u_2)$ e $Q = (\lambda u_1, \lambda u_2)$. Sabemos que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, devemos mostrar que $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OP}$, ou seja, devemos verificar que

1. O, P, e Q são colineares;

2. $|OQ| = |\lambda||OP|$;

3. OP e OQ tem o mesmo sentido se $\lambda > 0$, sentidos opostos se $\lambda < 0$.

1. De fato, se $u_1 = 0$, então O, P e Q estão sobre o eixo OY, portanto são colineares. Se $u_1 \neq 0$, então sejam $P' = (u_1, 0)$ e $Q' = (\lambda u_1, 0)$. Considere os triângulos retângulos $OP'P$ e $OQ'Q$ e note que a tangente do ângulo $\widehat{POP'}$ é $\dfrac{u_1}{u_2}$, e a tangente do ângulo $\widehat{QOQ'}$ é $\dfrac{\lambda u_1}{\lambda u_2} = \dfrac{u_1}{u_2}$. Daí, os ângulos $\widehat{POP'}$ e $\widehat{QOQ'}$ são congruentes, ou seja, os segmentos OP e OQ formam o mesmo ângulo com o eixo OX, portanto estão sobre a mesma reta, logo O, P e Q são colineares.



2. Com efeito,
$$|OQ| = \sqrt{\lambda^2 u_1^2 + \lambda^2 u_2^2} = |\lambda|\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\lambda||OP|.$$

3. Neste caso devemos analisar os casos:

- $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$
- $u_1 > 0$ e $u_2 = 0$
- $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$
- $u_1 = 0$ e $u_2 > 0$
- $u_1 = 0$ e $u_2 < 0$
- $u_1 < 0$ e $u_2 > 0$
- $u_1 < 0$ e $u_2 = 0$
- $u_1 < 0$ e $u_2 < 0$

Vamos analisar somente o primeiro, os demais são análogos.

Suponha que $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$. Neste caso OP está no primeiro quadrante e a reta que contém O, P e Q é uma reta que passa pela origem e intersecta o primeiro e o terceiro quadrante.

Se $\lambda > 0$, então $\lambda u_1 > 0$ e $\lambda u_2 > 0$, assim OQ também está no primeiro quadrante, logo OP e OQ têm o mesmo sentido.

Se $\lambda < 0$, então $\lambda u_1 < 0$ e $\lambda u_2 < 0$, assim OQ também está no terceiro quadrante, logo OP e OQ têm o sentidos contrários.

□

Exemplo 1.2.5. *Sejam $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$. Determine os representantes CD, CD' e CD'' dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $-2\overrightarrow{AB}$ e $2\overrightarrow{AB}$ com origem no ponto $C = (1, 1)$.*

Solução: Como $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$, da Proposição 1.14 então $-2\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$ e $-2\overrightarrow{AB} = (2, -2)$.

Sejam $D = (d_1, d_2)$, $D' = (d_1', d_2')$ e $D'' = (d_1'', d_2'')$, então

$$\overrightarrow{CD} = (d_1 - 1, d_2 - 1) = (1, -1) \Rightarrow d_1 = 2 \text{ e } d_2 = 0 \Rightarrow D = (2, 0),$$

$$\overrightarrow{CD'} = (d_1' - 1, d_2' - 1) = (-2, 2) \Rightarrow d_1 = -1 \text{ e } d_2 = 3 \Rightarrow D' = (-1, 3),$$

$$\overrightarrow{CD''} = (d_1'' - 1, d_2'' - 1) = (2, -2) \Rightarrow d_1 = 3 \text{ e } d_2 = -1 \Rightarrow D'' = (3, -1).$$

■

Assim como a soma de vetores, o produto de vetores por escalar herdam as seguintes propriedades dos número reais.

Proposição 1.15. *Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ vetores do plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as propriedades:*

1. ***Associatividade:*** $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$
2. ***Distributividade:***
$$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$$
$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u};$$

3. ***Elemento neutro:*** *O número* 1 *é o elemento neutro da multiplicação por escalar, ou seja,*

$$1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.$$

Exemplo 1.2.6. *Dados os vetores* $\overrightarrow{u} = (1,-1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (3,1)$*, determine*

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

Solução:

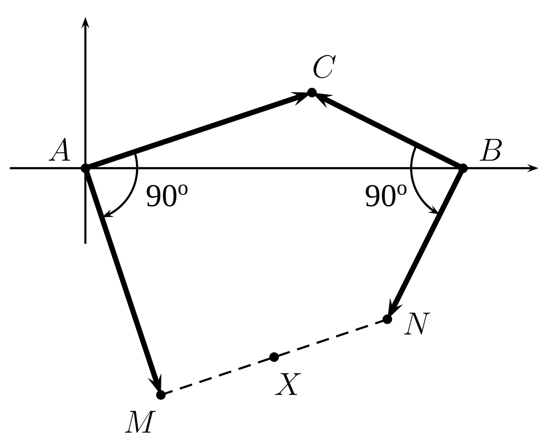
$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = 2(1,-1) + (3,1) = (2,-2) + (3,1) = (5,-1).$$
$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = (1,-1) + 2(3,1) = (1,-1) + (6,2) = (7,1)$$
$$\overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \frac{1}{2}(7,1) - (5,-1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5,-1) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

■

Finalizaremos essa seção com a solução do problema apresentado no início.

A solução do problema do tesouro

Augusto Wagner Carvalho estabeleceu na ilha, que felizmente era plana, um sistema de coordenadas com origem em A e com o ponto B no eixo OX. Ele mediu a distância de A até B e encontrou 40 metros. Assim, ficou estabelecido que $A = (0,0)$, $B = (40,0)$ e para a palmeira desaparecida ele pôs $C = (x,y)$.



Temos então que

$$\overrightarrow{AC} = (x,y), \quad \overrightarrow{AM} = (y,-x), \quad \overrightarrow{BC} = (x-40,y) \quad \overrightarrow{BN} = (-y,x-40).$$

Como A é a origem, as coordenadas do ponto M são $M = (y, -x)$. Logo, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = (40 - y, x - 40)$.

Sendo X o ponto médio do segmento MN, suas coordenadas são dadas por

$$X = \left(\frac{y + 40 - y}{2}, \frac{-x + x - 40}{2}\right) = (10, -20).$$

Portanto, para encontrar o tesouro, bastava andar 20m na direção de A para B e depois virar à direita e andar mais 20m. Competência de Augusto Wagner e azar de Barba Negra. A localização do tesouro ficou independente da palmeira.

1.2.2 Exercícios

1. Se $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, 1)$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$? E $AB = CD$? Justifique.

2. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

   a) $AB \in \overrightarrow{AB}$

   b) $AB \equiv CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

   c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A = CeB = C$

   d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AC \equiv BD$

3. Prove que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os pontos médios de suas diagonais coincidem.

4. Prove, usando a definição de soma de vetores, que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

5. Prove que, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

6. Prove, usando a definição de soma de vetores, a seguinte regra para determinar o vetor $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$: tomam-se representantes consecutivos, isto é, a origem de cada um coincidindo com a extremidade do anterior, e ”fecha-se o polígono”. Mostre que a regra vale para quatro e para cinco parcelas (é possível demonstrá-la para um número qualquer de parcelas usando o Princípio de Indução Finita.)

7. Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$, $E = (3, -2)$ e $F = (-4, -3)$ no plano cartesiano e efetue os seguintes cálculos:

   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

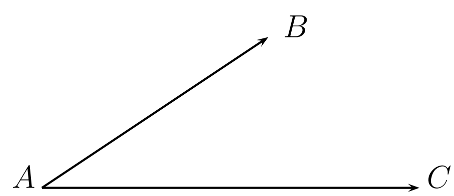
   b) $2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$

   c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$

d) $+\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{ED} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DC})$

1.3 Produto Interno

Dados os segmentos orientados AB e AC abaixo você seria capaz de determinar o ângulo entre eles?



Se você pensou em usar um transferidor parabéns, é uma boa ideia. Mas você seria capaz de encontrar esse ângulo usando apenas uma régua graduada, um lápis e um barbante?

Se você acha que não é capaz, imagine que você esteja no meio do deserto do Saara com muita sede, sozinho e não disponha de nenhuma tecnologia. De repente você encontra uma lâmpada mágica e o gênio diz que lhe concederá três desejos caso você consiga calcular este ângulo usando apenas uma régua graduada, um lápis e um barbante.

Se com este incentivo você ainda não é capaz de calcular este ângulo pesquise sobre a definição de radianos e tente novamente.

Podemos mostrar que dois segmentos equipolentes definem ângulos congruentes, ou seja, ângulos de mesma medida. Baseados nisso definiremos o que significa ângulo entre vetores e em seguida definiremos uma outra operação envolvendo dois vetores que relaciona suas coordenadas com seu ângulo.

Definição 1.16. *Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ definimos o **ângulo entre** $\overrightarrow{u}$ **e** $\overrightarrow{v}$ o menor ângulo formado pelos segmentos OP e OQ, representantes de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ respectivamente.*

Definição 1.17. *Definimos a **norma** de um vetor $\overrightarrow{v}$ como sendo o comprimento de qualquer dos seus representantes. Denotamos a norma de $\overrightarrow{v}$ por $\|\overrightarrow{v}\|$. Um vetor com norma igual a 1 é dito **vetor unitário**.*

Exemplo 1.3.1. *Calcule a norma dos vetores $\overrightarrow{u} = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (3,1)$ e $\overrightarrow{w} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

Solução: Sejam $A = (1,0)$, $B = (3,1)$ e $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Neste caso, pela definição,

$$\|\overrightarrow{u}\| = d(O, A) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

$$\|\overrightarrow{v}\| = d(O, B) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\|\overrightarrow{w}\| = d(O, C) = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Logo os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são unitário mas o vetor $\overrightarrow{w}$ não.

■

A norma de um vetor satisfaz algumas propriedades muito úteis.

Proposição 1.18. *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$;
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\overrightarrow{v} = 0$*;*
3. $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|$*;*
4. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$. *(desigualdade triangular)*

Demonstração: Sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$. As propriedades 1,2 e 3 são imediatas. Para demonstrar a desigualdade triangular precisamos do conceito de produto interno que será visto em seguida, portanto faremos sua demonstração no exemplo 1.3.3.

□

Definição 1.19. *O **produto interno ou escalar** entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o número real*

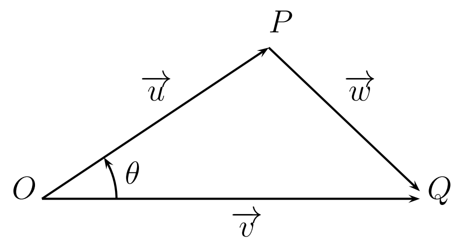
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre eles.

Proposição 1.20. *Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ são vetores no plano, então*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Demonstração: Sejam $P = (u_1, u_2)$ e $Q = (v_1, v_2)$. Neste caso $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ e seja $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2)$.



Como as normas dos vetores são os comprimentos dos lados do triângulo OPQ, sabemos, pela Lei dos cossenos, que

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta = \|\overrightarrow{w}\|^2.$$

Da definição de produto interno, temos que

$$2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{w}\|^2.$$

Substituindo as coordenadas no lado direito, obtemos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{w}\|^2)\\
&= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2)\\
&= \frac{1}{2}(2u_1v_1 + 2u_2v_2) = u_1v_1 + u_2v_2.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 1.3.2.

1. *Encontre o produto interno entre* $\overrightarrow{u} = (1,2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (5,4)$.
2. *Determinar o valor de* $a \in \mathbb{R}$ *tal que os vetores* $\overrightarrow{u} = (a,1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (2,3)$ *tenham produto interno igual a 15. Achar, também, o cosseno do ângulo formado por esses vetores.*

Solução:

1. Da Proposição 1.20 temos que

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 5 + 8 = 13.$$

2. Novamente, da Proposição 1.20 temos que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2a + 3 = 15 \Rightarrow a = 6.$$

Neste caso, note que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{37}$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{13}$. Da definição de produto interno temos que

$$15 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta = \sqrt{37}\sqrt{13}\cos\theta.$$

Daí,

$$\cos\theta = \frac{15}{\sqrt{481}}.$$

Usando uma calculadora científica podemos determinar que o ângulo θ é aproximadamente 46.84°.

■

Vejamos agora as principais propriedades que o produto interno satisfaz.

Proposição 1.21. *Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e para qualquer número real λ, valem as propriedades:*

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$;
2. $\lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v})$;
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$;
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$;
5. $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$ *(desigualdade de Cauchy-Schwartz)*

Demonstração: Tomando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e usando a Proposição 1.20 as propriedades 1-4 seguem imediatamente das propriedades de números reais. Quanto à propriedade 5, basta notar que $|\cos\theta| \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Com isso, da definição de produto interno, temos que

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\cos\theta| \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|.$$

□

Exemplo 1.3.3. *Vejamos agora como usar o produto interno para mostrar a desigualdade triangular.*

Solução: De fato, usando as propriedades de produto interno, podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \\
&= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| + \|\overrightarrow{u}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{u}\|^2 \\
&= (\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|)^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

■

Observe que, da definição de produto interno, dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$:

- Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0$;
- Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$;
- Se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, então $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0$.

Com isso, diremos que dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são **ortogonais ou perpendiculares**, e denotaremos por $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, quando $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

No exemplo 1.1.4 mostramos que, dado um ponto $P = (x_0, y_0)$, os pontos $Q = (x, y)$ que pertencem à reta r que passa pela origem e é perpendicular ao segmento OP devem satisfazer a equação

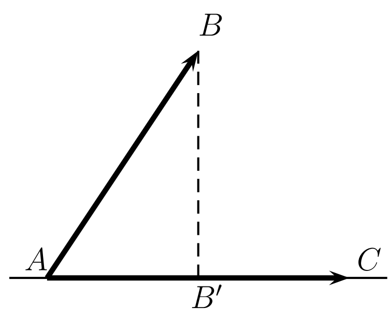
$$xx_0 + yy_0 = 0.$$

Podemos obter o mesmo resultado utilizando vetores e produto interno. Note que o segmento OP define o vetor $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0)$, assim, para que Q pertença à r os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ} = (x, y)$ devem ser ortogonais, ou seja,

$$0 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = xx_0 + yy_0.$$

Veremos agora algumas aplicações do produto interno.

Exemplo 1.3.4. *Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ representados por segmentos orientados de mesma origem. Seja r a reta que passa pelo ponto B e é perpendicular à reta s que contém AC. Seja B' o ponto de interseção dessas duas retas. Determine o vetor $\overrightarrow{AB'}$, em função de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.*



Solução: Como A, B' e C são colineares sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

Neste caso devemos determinar esse λ em função de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Para isso, note que

$$\overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Além disso, podemos ver que $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB}$. Daí, multiplicando esta equação por $\overrightarrow{AC}$ vemos que

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \lambda\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \lambda\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\right)\overrightarrow{v}.$$

■

Com base neste exemplo temos a seguinte definição.

Definição 1.22. *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano. O vetor*

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} := \left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\right)\overrightarrow{v},$$

será dito ***projeção ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$.***

Exemplo 1.3.5.

1. *Determine os valores $m \in \mathbb{R}$ que fazem da projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{u} = (m+1, m-1)$ sobre o vetor $\overrightarrow{v} = (m, 1-m)$ ser unitária.*

2. *Encontre um vetor perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.*

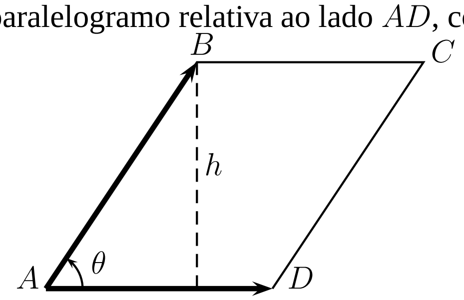
Exemplo 1.3.6. *Dado um paralelogramo $ABCD$, temos que*

$$\textit{Área}(ABCD) = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AD}^2\| - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}.$$

E dado um triângulo ABC, temos que

$$\textit{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Solução: Em um paralelogramo $ABCD$ considere os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, e seja θ o ângulo entre eles. Seja ainda h a altura do paralelogramo relativa ao lado AD, como na figura abaixo.



Sabemos, da geometria básica, que a área do paralelogramo é o produto de um dos lados pela respectiva altura. Neste caso, temos que

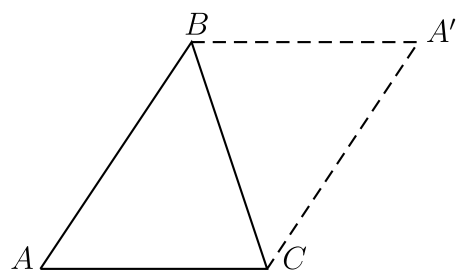
$$\text{Área}(ABCD) = \|\overrightarrow{AD}\|h.$$

Com isso, basta determinarmos o valor de h. Sabemos que $h = \|\overrightarrow{AB}\| \operatorname{sen}\theta$, daí,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(ABCD)^2 &= \|\overrightarrow{AD}\|^2 h^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2\, \|\overrightarrow{AB}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{AD}\|^2\, \|\overrightarrow{AB}\|^2 (1-\cos^2\theta) \\
&= \|\overrightarrow{AD}\|^2\, \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\, \|\overrightarrow{AB}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\overrightarrow{AD}\|^2\, \|\overrightarrow{AB}\|^2 - (\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})^2.
\end{aligned}$$

Donde segue o resultado.

Para obtermos a área de um triângulo basta observarmos que esta é metade da área do paralelogramo formado por dois de seus lados.



■

Exemplo 1.3.7. *Sejam* $A = (0, -1)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, 2)$ *e* $D = (-2, 1)$. *Mostre que o quadrilátero* $ABCD$ *é um paralelogramo e determine sua área.*

Solução: Primeiro devemos verificar que os pontos C e D não estão sobre a reta que passa por A e B, ou seja, devemos ver que A, B e C não são colineares, bem como A, B e D.

Se A, B e C fossem colineares existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Neste caso teríamos que

$$(3, 1) = \lambda(1, 3) \Rightarrow \lambda = 3 \text{ e } \lambda = 1/3,$$

o que é um absurdo! Portanto A, B e C não são colineares. Do mesmo modo podemos mostrar que A, B e D não são colineares.

Com isso o quadrilátero é um paralelogramo pois AC e BD tem o mesmo ponto médio. (Verifique!)

Agora calculemos a área do paralelogramo. Note que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{10}$, $\|\overrightarrow{AD}\| = 2\sqrt{2}$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -4$, daí,

$$\text{Área}(ABCD) = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AD}^2\| - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2} = 8.$$

■

1.3.1 Exercícios

1. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

   a) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores no plano, então $\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{v}$ e $\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u}$ são vetores de mesmo comprimento.

   b) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm mesmo comprimento, então $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ são ortogonais.

   c) Se $\overrightarrow{u} \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot w$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

   d) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores no plano, então $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

   e) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores no plano, então $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2)$.

   f) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores no plano, então $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

   g) Se $\overrightarrow{u} = (x, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (x, -1)$ são ortogonais, então $x = 1$ ou $x = -1$.

   h) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.

   i) O triângulo determinado pelos vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.

   j) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são nulos e $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{v}}\, \overrightarrow{u} = 0$, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

   k) Se $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{u}$, então $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{u}}\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

   l) Se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot w$, então $\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$.

2. Ache o ângulo entre os vetores

   a) $\overrightarrow{u} = (2, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1)$

   b) $\overrightarrow{u} = (2, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 2)$

   c) $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 2)$

   d) $\overrightarrow{u} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{v} = (\sqrt{3}, 1)$

3. Determine a norma da projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$.

4. Dados $\overrightarrow{u} = (4, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (2, -1)$ encontre dois vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_1}$ é paralelo a $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u_2}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$. Esboce essa decomposição.

5. Encontre os vetores com norma $3\sqrt{3}$ e perpendiculares a $\overrightarrow{v} = (2, 3)$. Quais formam ângulo agudo com $(1, 0)$?

6. Encontre o produto $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ sabendo que o paralelogramo $ABCD$ tem lados de comprimento 1 e 2 e área 1.

7. A medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\frac{\pi}{4}$. Sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{5}$ e $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, ache a media em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

8. Mostre que

   a) $\big|\|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\|\big| \leq \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$

   b) $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos.

1.4 Estudo da Reta no Plano

Vimos que o uso de um sistema de coordenadas nos permite representar pontos e vetores através de pares ordenados, e assim resolver de forma fácil diversos problemas geométricos. Nesta seção faremos um estudo detalhado de uma reta o plano. Veremos que a representação algébrica de retas se dá pelo uso de um certo tipo de equações. Para isso apresentaremos inicialmente algumas definições.

Definição 1.23. *Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é* ***múltiplo*** *de $\overrightarrow{v}$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.*

Observação: *Note que desta definição podemos concluir que:*

1. *O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor. Contudo nenhum vetor não nulo é múltiplo do vetor nulo.*
2. *Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são nulos, então $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$.*
3. *Sejam $A,\ B$ e C pontos distintos, então $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AC}$ se, e somente se, $A,\ B$ e C são colineares.*

Exemplo 1.4.1. *Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (1,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,1)$ e $\overrightarrow{w} = (2,-1)$. Mostre que $\overrightarrow{u}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{v}$, mas sim de $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.*

Solução: Se $\overrightarrow{u}$ fosse múltiplo de $\overrightarrow{v}$, então, pela Definição 1.23, existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$. Daí,

$$(1,0) = \lambda(1,1) \Rightarrow \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 0,$$

um absurdo! Logo $\overrightarrow{u}$ não é múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Note $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (3,0) = 3(1,0) = 3\overrightarrow{u}$. Daí,

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).$$

Logo $\overrightarrow{u}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

■

Definição 1.24. *Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ é* ***paralelo a uma reta*** *r, e escrevemos $\overrightarrow{v} \,/\!/\, r$, se, para quaisquer pontos $A,\ B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo de $\overrightarrow{v}$. Dizemos que um vetor não nulo $\overrightarrow{v}$ é* ***ortogonal a uma reta*** *r, e escrevemos $\overrightarrow{v} \perp r$, se, para quaisquer pontos $A,\ B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v}$.*

Vejamos agora uma maneira de representar algebricamente uma reta.

1.4.1 Equação paramétrica da reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de uma reta r e $\vec{v} = (a, b)$ um vetor paralelo a esta reta. Da definição de vetor paralelo a uma reta, um ponto $P = (x, y)$ pertence a r se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}. \tag{1.2}$$

Esta equação é dita **equação vetorial paramétrica da reta** r e t é dito **parâmetro**.

Em coordenadas temos que

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b),\ t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b),\ t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, cada coordenada define equações que dependem do parâmetro t, isto é,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de **equações paramétricas da reta** r.

Exemplo 1.4.2.

1. *Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (5, 2)$.*

2. *Mostre que os pontos $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 2)$ e $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ são colineares e determine as equações paramétricas para a reta que os contém.*

Solução:

1. Como $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$ é um vetor paralelo à reta que passa por A e B, pelo visto acima, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Como no item anterior podemos ver que a reta r que passa pelos pontos A e B tem equação vetorial paramétrica dadas por

$$r : (x, y) = (-1 + t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, temos que

$$t = 2 \Rightarrow (x, y) = (1, 2) = C$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Daí, C e D pertencem à reta r e portanto os pontos A, B, C e D são colineares.

■

Podemos reescrever a equação (1.2) a fim de dar-lhe uma interpretação geométrica. Da definição de soma de vetores, sabemos que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$. Assim, da equação (1.2) temos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{v}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OA}$ têm mesmas coordenadas dos pontos P e A respectivamente, podemos, por um abuso de notação, reescrever a equação (1.2) da seguinte forma

$$P = A + t\overrightarrow{v}.$$

Sabemos que ao multiplicarmos o vetor $\overrightarrow{v}$ por um número real t alteramos apenas seu comprimento e sentido. Com isso, podemos dizer que se partirmos do ponto A na direção do vetor $\overrightarrow{v}$, alterando apenas seu sentido e comprimento, podemos obter todos os pontos da reta.

As equações paramétricas nos permitem representar uma reta, um objeto puramente geométrico, de maneira algébrica. Podemos ver que uma mesma reta tem infinitas representações, bastando escolher pontos diferentes da reta. Porém, para cada representação, todos os pontos da reta estão associados a um único número real, o parâmetro t, ou seja, se variarmos t sobre todos os números reais percorremos todos os pontos da reta. Por este motivo dizemos que a reta tem dimensão 1.

Agora apresentaremos uma outra maneira igualmente útil de representar uma reta.

1.4.2 Equação cartesiana da reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de uma reta r e $\overrightarrow{u} = (a, b)$ um vetor ortogonal à reta r. Neste caso, um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

Com isso, temos que

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Fazendo $c = -ax_0 - by_0$ temos que

$$ax + by + c = 0. \tag{1.3}$$

Esta equação é dita **equação cartesiana da reta**.

Exemplo 1.4.3.

1. *Encontre a equação cartesiana da reta r que passa por $A = (2, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (3, 2)$.*

2. *Encontre a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (5, -9)$.*

Solução:

1. Como vimos a equação cartesiana é da forma

$$3x + 2y + c = 0.$$

Como todos os pontos da reta r devem satisfazer a equação, para determinarmos o valor de c basta substituirmos o ponto A na equação, assim

$$6 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -10.$$

Logo a equação da reta r é

$$3x + 2y - 10 = 0.$$

2. Seja r a reta que passa pelos pontos P e Q. Neste caso, o vetor $\overrightarrow{PQ} = (4, -12)$ é paralelo à reta r. Para encontrarmos a equação cartesiana da reta r necessitamos de um vetor ortogonal à reta. Note que o vetor $\overrightarrow{u} = (3, 1)$ é ortogonal à $\overrightarrow{PQ}$ e portanto é ortogonal à r. Com isso, a equação da reta r é da forma

$$3x + y + c = 0.$$

Substituindo o ponto P na equação obtemos que $c = -6$, portanto

$$r : 3x + y - 6 = 0.$$

■

Observação: *Note que a equação (1.3) não é uma reta! Uma equação é um objeto algébrico, enquanto uma reta é um objeto geométrico. A equação cartesiana de uma reta é a relação que as coordenadas dos pontos da reta devem satisfazer, portanto ela depende do sistema de coordenada cartesiana que estamos usando, ou seja, se mudarmos o nosso sistema de coordenadas a equação que representa a reta também muda. Além disso, com no caso das equações paramétricas da reta, existem infinitas equações que representam a mesma reta, bastando para isso mudar o vetor ortogonal à reta. Note que no exemplo anterior, item 2, poderíamos tomar o vetor* $\overrightarrow{v} = (12, 4)$ *como o vetor ortogonal à reta. A maneira correta de se representar uma reta é usando a notação de conjunto, assim uma reta* r *representada pela equação (1.3) é o seguinte conjunto*

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ax + by + c = 0\}.$$

Porém, a fim de simplificar a notação escreveremos simplesmente

$$r : ax + by + c = 0,$$

devendo termos em mente o conjunto acima.

Dizemos que uma reta é **vertical** quando é o eixo OY ou uma reta paralela a ele. Neste caso, qualquer reta vertical é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$, portanto as retas verticais têm equação da forma

$$x + c = 0.$$

Se a reta passa pelo ponto $(x_0, 0)$ obtemos que a equação da reta é

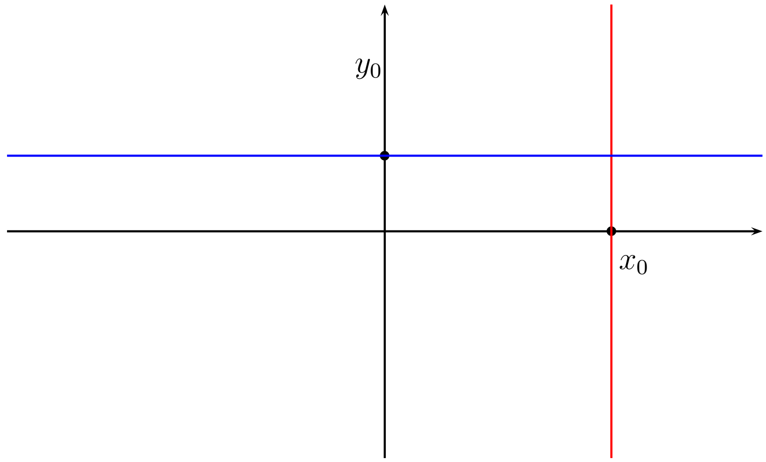
$$x = x_0.$$

Daí, o eixo OY tem equação cartesiana $x = 0$.

Uma reta é dita **horizontal** quando é o eixo OX ou uma reta paralela a ele. Como no caso das retas verticais, as retas horizontais têm equações da forma

$$y = y_0,$$

onde $(0, y_0)$ é o ponto do eixo OY que ela intercepta.



Uma reta $r : ax + by + c = 0$ não vertical tem o coeficiente b não nulo, portanto podemos reescrevê-la da seguinte forma

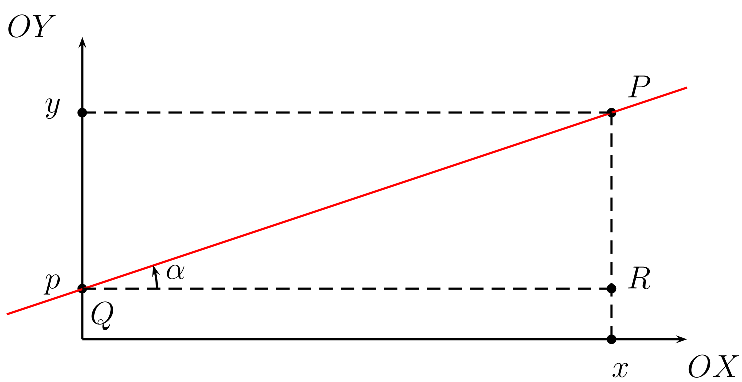
$$r : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Tomando $m = -\frac{a}{b}$ e $p = -\frac{c}{b}$ temos que

$$r : y = mx + p. \tag{1.4}$$

Esta equação é denominada **equação reduzida da reta**. A equação da reta nessa forma nos permite dar sentido geométrico aos coeficientes m e p. De fato, como a reta não é vertical, é claro que ela corta o eixo OY. Portanto, fazendo $x = 0$ na equação reduzida da reta temos que $y = p$, ou seja, a reta intercepta o eixo OY no ponto $(0, p)$. Por esse motivo dizemos que p é o **coeficiente linear** da reta.

Vamos dar uma interpretação geométrica ao coeficiente m. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta e note que os pontos P, $Q = (0, p)$ e $R = (x, p)$ formam um triângulo retângulo com ângulo reto em R, como na figura abaixo.



Denotemos por α o ângulo que a reta forma uma reta horizontal. Do triângulo retângulo temos que a tangente deste ângulo é

$$\tan \alpha = \frac{y - p}{x}.$$

Como $P = (x, y)$ é um ponto da reta diferente de Q, isolando o coeficiente m na equação reduzida da reta, obtemos que

$$m = \frac{y - p}{x} = \tan\alpha.$$

Logo, m é a tangente do ângulo que a reta faz como qualquer das retas horizontais. Por este motivo m é chamado de **coeficiente angular da reta**.

Exemplo 1.4.4.

1. *Determine as equações paramétricas da reta r dada pela equação cartesiana:*

$$r : 2x - 3y + 12 = 0.$$

2. *Determine uma equação cartesiana da reta r cujas equações paramétricas são:*

$$s : \begin{cases} x = -6t \\ y = 4 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução:

1. Sabemos que o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3)$ é um vetor ortogonal à reta r. Daí, como o vetor $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$, temos que $\overrightarrow{v}$ é paralelo à reta r. Fazendo $x = 0$ na equação cartesiana da reta r obtemos que $A = (0, 4)$ é um ponto da reta r. Portanto, as equações cartesianas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = -3t \\ y = 4 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Das equações paramétricas temos que $A = (0, 4)$ é um ponto da reta s e $\overrightarrow{u} = (-6, -4)$ é um vetor paralelo à reta s. Daí, obtemos que $\overrightarrow{v} = (2, -3)$ é um vetor ortogonal à reta s. Assim, sabemos que a reta s tem equação cartesiana da forma

$$2x - 3y + c = 0.$$

Substituindo A na equação obtemos que $c = -12$. Logo, obtemos

$$s : 2x - 3y - 12 = 0$$

$\blacksquare$

1.4.3 Posições relativas e ângulos entre retas

Nesta seção veremos como determinar as posições entre duas retas no plano. Também formalizaremos a noção de ângulo entre duas retas e, com auxilio do produto interno, veremos algumas aplicações deste conceito.

Dados duas retas no plano r e r', sabemos que ou elas são coincidentes, ou são paralelas ou são concorrentes. Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v'}$ vetores paralelos à r e r' respectivamente. Neste caso, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v'}$ não são múltiplos, então r e r' são concorrentes. Caso contrário, ou seja, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v'}$ são múltiplos, então ou as retas são coincidentes ou elas são paralelas. Neste último caso, para sabermos se são coincidentes ou paralelas, devemos verificar se algum ponto de uma das retas pertence à outra. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4.5. *Determine as posições relativas entre as retas r e r' do plano onde:*

1. $r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$ *e* $r': \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

2. $r: x - 3y = 1$ *e* $r': \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Solução:

1. Das equações paramétricas vemos que $\overrightarrow{v} = (-2, 3)$ e $\overrightarrow{v'} = (-1, 1)$ são os vetores paralelos a r e r' respectivamente. Como não são múltiplos temos que r e r' são concorrentes.

2. Das equações vemos que o vetor $\overrightarrow{v} = (3, 1)$ é paralelo a ambas as retas. Neste caso, r e r' são coincidentes ou paralelas. Podemos ver imediatamente que o ponto $A = (-1, 1)$ pertence à reta r'. Porém, substituindo sua coordenadas na equação da reta r vemos que

$$x - 3y = -1 - 3 = -4 \neq 1.$$

Logo A não pertence à reta r e portanto elas são paralelas.

$\blacksquare$

Como vimos duas retas podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes. Sabemos da geometria básica que duas retas concorrentes formam claramente quatro ângulos, sendo os ângulo opostos pelo vértice de mesma medida. Além disso, conhecendo a medida de um deles temos a medida do outro, visto que são complementares. Porém quando duas retas são coincidentes ou paralelas falar em ângulos entre elas parece-nos um pouco estranho. Entretanto, se olharmos para vetores paralelos a essas retas podemos tomar representantes com a mesma origem e calcular a medida do ângulo entre eles, assim o ângulo entre retas paralelas ou coincidentes mediriam 0 e π radianos.

Baseados neste raciocínio, tomaremos o ângulo entre duas retas como sendo o ângulo de menor medida formado por vetores paralelos a elas. Mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição 1.25. *Sejam r e s retas no plano e sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores paralelos a r e s respectivamente. Definimos o* ***ângulo entre*** r **e** s *como o ângulo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que*

$$\cos\theta = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Exemplo 1.4.6.

1. *Encontre o cosseno do ângulo entre as retas r e s dadas por*

$$r:\ 3x - 4y = 1 \quad \textit{e} \quad s: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. *Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $(2, -1)$ formando um ângulo de 45^ocom a reta $r:\ 2x - 3y + 7 = 0$.*

Solução:

1. Sabemos que $\overrightarrow{u} = (4, 3) /\!/ r$ e $\overrightarrow{v} = (2, -1) /\!/ s$. Como $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5$, $\|\overrightarrow{u}\| = 5$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5}$, da definição de ângulo entre retas, temos que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. Sabemos que um vetor paralalelo à reta r é o vetor $\overrightarrow{u} = (3, 2)$. Como já temos o ponto $P = (2, -1)$, para determinarmos a equação cartesiana da reta que forma um ângulo de 45^ocom a reta r precisamos apenas de um vetor ortogonal a ela. Seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal à reta procurada, neste caso, sabemos que $\overrightarrow{w} = (-b, a)$ é um vetor paralelo a ela, assim, pela definição de ângulo entre retas temos que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3b + 2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{13}}.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado afim de eliminarmos as raízes temos que

$$\frac{1}{2} = \frac{(-3b + 2a)^2}{13(a^2 + b^2)}.$$

Daí,

$$13a^2 + 13b^2 = 2(-3b + 2a)^2.$$

Desenvolvendo o binômio do lado direito e agrupando os temos comuns temos que

$$5a^2 - 24ab = 5b^2.$$

Para simplificarmos esta identidade aplicaremos a técnica de completar quadrados. Inicialmente, multiplicando a identidade por 1/5, obtemos que

$$a^2 - \frac{24}{5}ab = b^2.$$

Agora queremos acrescentar um termo na expressão do lado esquerdo de modo que ela se torne um quadrado perfeito, ou seja, queremos completar o quadrado perfeito. Vamos fazer isso separadamente. Note que o termo $a^2 - \frac{24}{5}ab$ é quase um quadrado perfeito, restando apenas o último termo. Assim para que ele se torne um quadrado perfeito devemos acrescentar um termo x^2 nessa expressão, ou seja,

$$a^2 - \frac{24}{5}ab + x^2.$$

Se esta nova expressão for um quadrado perfeito teremos a seguinte identidade

$$(a - x)^2 = a^2 - \frac{24}{5}ab + x^2.$$

Desenvolvendo o lado direito, temos que

$$a^2 - 2ax + x^2 = a^2 - \frac{24}{5}ab + x^2.$$

Daí, determinamos que

$$x = \frac{12}{5}b.$$

Agora voltando à identidade que desejamos simplificar, ou seja,

$$a^2 - \frac{24}{5}ba = b^2.$$

Sabemos que acrescentando o termo $x^2 = \dfrac{144}{25}b^2$ à expressão do lado esquerdo ela se torna um quadrado perfeito. Entretanto, para que a identidade não se altere, somaremos o mesmo termo a ambos os lados da identidade

$$a^2 - \frac{24}{5}ba + \frac{144}{25}b^2 = \frac{144}{25}b^2 + b^2 = 0.$$

Daí,

$$\left(a - \frac{12}{5}b\right)^2 = \frac{169}{25}b^2.$$

Portanto,

$$a - \frac{12}{5}b = \frac{13}{5}b \text{ ou } a - \frac{12}{5}b = -\frac{13}{5}b.$$

Com isso obtemos que

$$a = 5b \text{ ou } a = -\frac{1}{5}b.$$

Assim obtemos duas relações entre a e b, ou seja, $\overrightarrow{v} = (b, 5b)$ ou $\overrightarrow{v} = (b, -fracb5)$. Lembre-se que uma reta tem infinitos vetores ortogonais mas para determinarmos a equação de uma reta precisamos de apenas um, assim fazendo $b = 1$ no primeiro e $b = 5$ no segundo obtemos os vetores

$$\overrightarrow{v} = (1, 5) \text{ e } \overrightarrow{v} = (5, -1).$$

Logo, as duas retas possíveis são da forma

$$x + 5y + c_1 = 0 \text{ ou } 5x - y + c_1 = 0.$$

Substituindo o ponto $P = (2, -1)$ nessas equações obtemos os valores de c_1 e c_2, e portanto obtemos as retas:

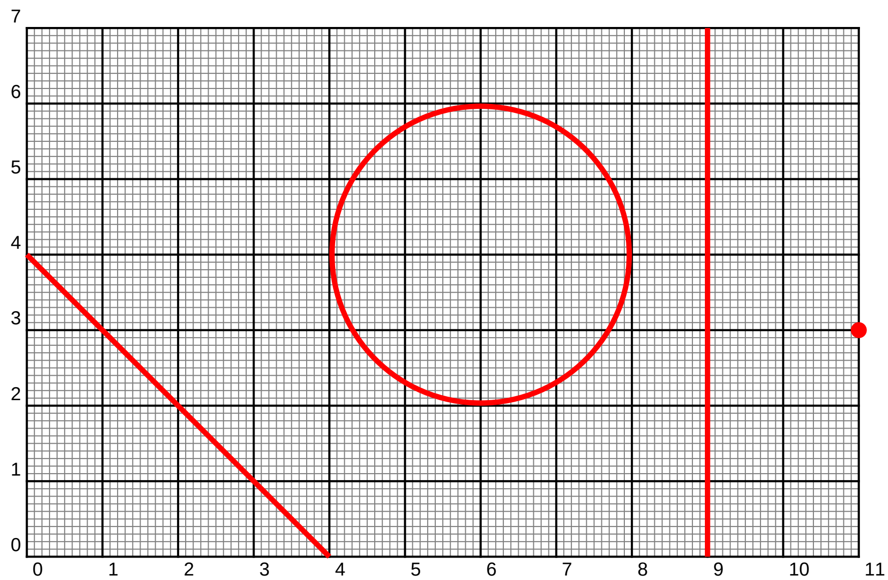
$$x + 5y + 3 = 0 \text{ ou } 5x - y + 11 = 0.$$

■

1.4.4 Distâncias

Nesta seção definiremos distâncias de ponto a reta e entre duas retas e, utilizando o produto interno, veremos como determiná-las.

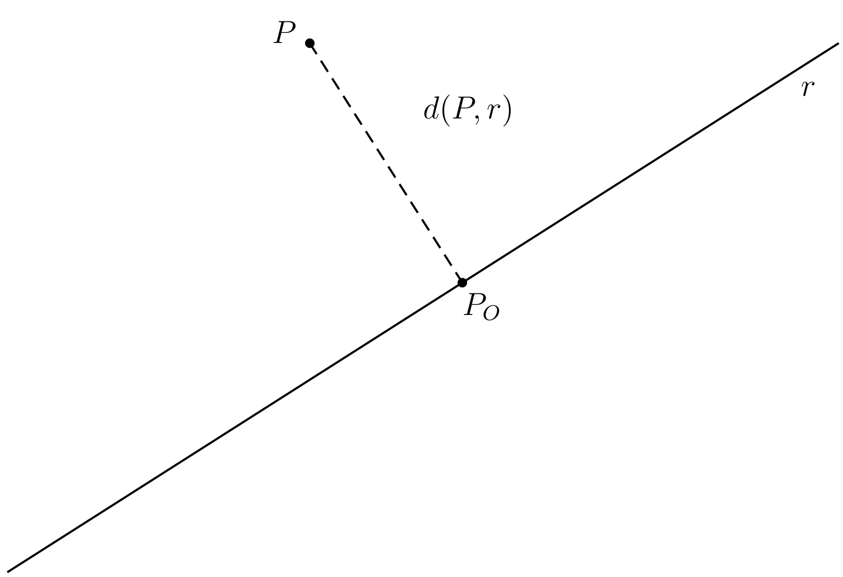
Sabemos, da experiência, que o caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta. Por isso, definimos a distância entre dois pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que os une. Entretanto a noção de distância pode ser estendida para outros objetos. Antes de definirmos a distância entre ponto e reta, e entre retas vamos fazer uma experiência. Dados os objetos abaixo, como você calcularia a distância entre eles? Usando a malha abaixo e sua intuição tente calcular as distâncias entre eles.



Se você seguiu sua intuição corretamente você deve ter obtido 5 como a distância entre os dois segmentos, 2 a distância entre o ponto e o segmento vertical, aproximadamente $7,6$ a distância entre o ponto e o outro segmento, aproximadamente $2,26$ a distância entre o círculo e o segmento não vertical, 1 a distância entre o círculo e o segmento vertical e aproximadamente $3,1$ a distância entre o círculo e o ponto.

Este experimento nos leva a conclusão de que uma boa maneira de se definir a distância entre dois objetos é tomar a menor das distâncias entre todos os seus pontos. Isso nos motiva a dar a seguinte definição.

Definição 1.26. *Sejam r uma reta e P um ponto do plano.* ***A distância de** P **a** r, que denotaremos por* ***d(P,r)****, é dada pela distância do ponto P ao ponto P_0, onde P_0 é a interseção da reta r com a reta s, perpendicular a r passando por P.*



Podemos deduzir uma expressão da distância de ponto a reta dependendo apenas das coordenadas do ponto e a equação cartesiana da reta, ou seja, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.27. *A distância de um ponto* $P = (x_0, y_0)$ *à uma reta* $r: \ ax + by + c = 0$ *é dada por*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Demonstração: Pela definição de distância de ponto a reta, devemos encontrar o ponto P_0 sobre a reta s perpendicular à reta r passando por P e calcular $d(P, P_0)$. Vamos primeiramente determinar s.

Como $\overrightarrow{v} = (a, b)$ é um vetor ortogonal a r temos que $\overrightarrow{v}$ é paralelo a s, portanto a equação vetorial paramétrica de s é

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + at, y_0 + bt), \ t \in \mathbb{R}.$$

Como $P_0 \in s$ temos que $P_0 = (x_0 + at, y_0 + bt)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Daí, como P_0 também pertence a r, substituindo suas coordenadas na equação cartesiana de r e isolando t obtemos que

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Com isso temos que

$$P_0 = (x_0, y_0) - \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}(a, b).$$

Como $d(P_0, P) = \|\overrightarrow{P_0P}\|$, das propriedades da norma, temos que

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{P_0P}\| = \left\| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}(a, b) \right\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\|(a, b)\|^2}\|(a, b)\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\|(a, b)\|}.$$

$\square$

Exemplo 1.4.7. *Determine a distância do ponto* $P = (-4, -2)$ *à reta* r *de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = -2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solução:

Como $\overrightarrow{v} = (5, 3) /\!/ r$ temos que $\overrightarrow{u} = (3, -5)$ é ortogonal a r, portanto r tem equação cartesiana da forma

$$3x - 5y + c = 0.$$

Substituindo $P_0 = (-3, -2)$ nesta equação obtemos que $c = 1$, assim temos

$$r : 3x - 5y + 1 = 0.$$

Com isso, temos que

$$d(P, r) = \frac{|3 \times (-4) - 5 \times (-2) + 1|}{3^2 + 5^2} = -\frac{2}{\sqrt{34}}$$

■

Agora vejamos como definir e calcular distância entre duas retas.

Definição 1.28. *Sejam r e s retas no plano. Definimos a* **distância entre** r **e** s*, e denotamos por* $d(r, s)$*, de acordo com cada um dos seguintes casos:*

1. *Se r e s são concorrentes, então $d(r, s) = 0$;*
2. *Se r e s são paralelas ou coincidentes, então $d(r, s) = d(P, r) = d(Q, s)$, onde P e Q são pontos quaisquer de r e s respectivamente.*

Exemplo 1.4.8. *Determine a distância entre as retas r e s dadas por:*

$$r : \ 3x - 6y = 2 \quad \textit{e} \quad s : \ 2x - 4y + 5 = 0.$$

Solução: Sabemos que $\overrightarrow{u} = (6, 3) /\!\!/ r$ e $\overrightarrow{v} = (4, 2) /\!\!/ s$. Note que $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$, daí, as retas r e s são coincidentes ou paralelas. Neste caso, como o ponto $P = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ pertence a r temos que

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \times \frac{2}{3} - 4 \times 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{19}{6\sqrt{5}}.$$

■

1.4.5 Exercícios

1. Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

   a) Se $\overrightarrow{u} = (x, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (x, -1)$ são ortogonais, então $x = 1$ ou $x = -1$.

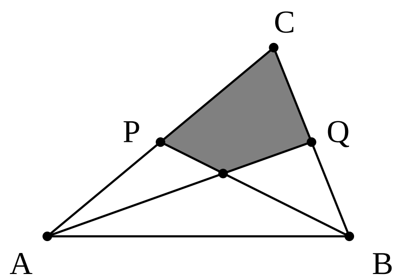
   b) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.

   c) Toda a reta da forma $y = ax + 3 - 5a$ passa pelo ponto $(5, 3)$.

d) O ponto $P = (1,1)$ pertence à reta que passa pelo ponto $Q = (1,2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,1)$.

2. Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $A = (1,-3)$ e $B = (3,1)$?

3. No triângulo a seguir, os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente 4, 3 e 2. Os pontos P e Q são os pontos médios dos segmentos a que pertencem. Calcule a área sombreada.



4. Para cada reta e ponto dados abaixo encontre a equação da reta paralela e da reta perpendicular passando pelo ponto:

   a) $y = -2x + 5$, $P = (1,1)$;
   b) $3x + 2y = 10$, $P = (0,1)$;
   c) $y = 3$, $P = (-1,2)$;
   d) $y = \pi x + \pi$, $P = (\sqrt{2}, 3)$.

5. Encontre as coordenadas do ponto P interseção do círculo de centro $(0,1)$ e raio 1 com a reta que passa pelo ponto $(0,2)$ e corta o eixo OX.

6. Ache os pontos da reta $y = 2x + 1$ que estão situados à distância 2 da origem.

7. Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x - 2y = 2$ passando pelo ponto $A = (5,-1)$?

8. Quais são as paralelas situadas à distância 5 da reta $3x - 4 = 1$?

9. Qual é a distância entre as retas $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$?

10. Qual é o ponto de interseção da reta $ax + by = c$ com a reta OA, onde $A = (a,b)$?

11. Em que pontos a reta $ax + by = c$ corta oes eixos OX e OY?

12. Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2,3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 2$.

13. Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$, $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

14. A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t+1$ e $y = 3t+8$ forma um ângulo agudo α com a reta $5x + 11y = 6$. Determine α.

15. Que ângulos faz a reta $3x + 4y = 7$ com os eixos OX e OY?

16. Escreva, sob a forma $ax + by = c$, a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45^0 com a reta $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 1$.

17. Determine a distância Δ do ponto $P = (3, 1)$ à reta $x + 2y = 3$. Ache o ponto $Q = (x, y)$ sobre esta reta, tal que $d(P, Q) = \Delta$

18. Em cada caso abaixo determine as retas que passam pelo ponto P e formam o ângulo θ com a reta r :

    a) $P = (1, 1)$, $\theta = 30°$ e $r : x - 3y = 1$;

    b) $P = (-5, 3)$, $\theta = 90°$ e $r : y = 2x - 1$;

    c) $P = (-1, 1)$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ e $r : 3x + 2y = 1$.

19. Marque no plano OXY o pontos $O = (0, 0)$, $A = (0, 3)$, $B = (3, 3)$, $C = (3, 1)$, $D = (5, 1)$ e $E = (5, 0)$. Considere uma chapa formada pelo interior do polígono $OABCDE$. A reta formada pelo segmento $\overline{OC}$ divide a chapa numa razão $k = \frac{\text{área}(OABC)}{\text{área}(OCDE)}$, encontre o valor de k. Encontra a equação de uma reta r, passando pela origem, que divide a chapa em duas partes de mesma área. Essa reta é única? E uma reta passando pelo ponto B?

20. Encontre os pontos de $r : x + y - 1 = 0$ que equidistam de $A = (3, 2)$ e $B = (2, -1)$.

21. Determine o ponto de $r : 2x - y - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a $P = (2, 1)$ e a $Q = (1, 1)$ seja mínima. E determine o ponto de r tal que o módulo da diferença entre as distância seja máximo.

22. Dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$, obtenha as equações das retas mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e determine as coordenadas da interseção dessas retas. A partir daí, ache a equação da circunferência que passa por A, B e C.

23. No exercício anterior, mantenha os pontos A e B mas substitua C pelo ponto $D = (1, 7)$. Qual será a resposta?

24. Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?

25. Diz-se que duas circunferências se cortam ortogonalmente quando, em cada ponto da sua interseção, as tangentes respectivas são perpendiculares. Isto ocorre se, e somente se, o quadrado da distância entre seus centros é igual à soma dos quadrados dos seus raios (por quê?). A partir daí, mostre que as duas circunferências

$$x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0 \text{ e}$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 19 = 0$$

cortam-se ortogonalmente.

1.5 Cônicas

As cônicas são curvas obtidas pela interseção de um plano com um cone circular reto, por isso são chamadas de seções cônicas ou apenas cônicas. Elas são classificadas como sendo elipse, hipérbole ou parábola.

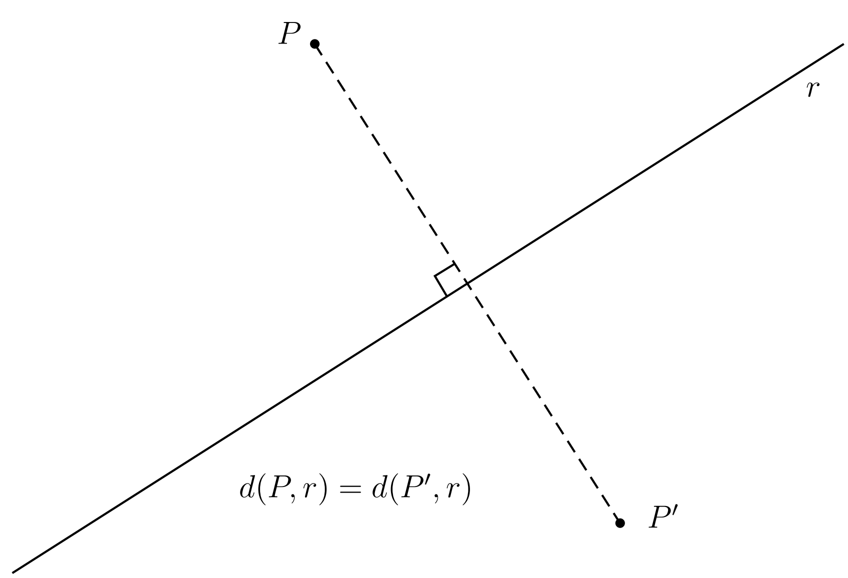
Nesta seção faremos um estudo introdutório das curvas do plano conhecidas como cônicas. A partir da definição geométrica dessas curvas deduziremos suas equações e aprenderemos a esboçar seus gráficos.

Para um estudo mais aprofundado recomendamos as referências [1, 2].

1.5.1 Simetrias

Nesta seção introduziremos o conceito de simetrias em relação a uma reta e a um ponto. Estes conceitos, fundamentais no estudo da geometria em geral e do cálculo, serão importante para o estudo das propriedades geométricas das cônicas.

Definição 1.29. *Seja r uma reta no plano. O* ***simétrico de um ponto*** *P* ***do plano em relação à reta*** *r, é o ponto P' sobre a perpendicular a r que passa por P e cuja a distância a r é a mesma que a distância de P a r.*



Exemplo 1.5.1. *Determine o ponto Q simétrico ao ponto $P = (1,2)$ em relação à reta $r:\ 2x - 3y = 1$*

Solução: A reta perpendicular à r passando por P tem equação paramétrica dada por

$$r' : (x, y) = (1 + 2t, 2 - 3t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Como $P' \in r'$ temos que $P' = (1 + 2t, 2 - 3t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$d(P, r) = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Daí,

$$d(P', r) = \frac{|2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Desenvolvendo a igualdade chegamos que

$$| - 5 + 13t| = 5.$$

Donde, temos que $t = 0$ ou $t = 10/13$. Note que a solução $t = 0$ nos fornece o ponto P, portanto a descartamos e logo temos que

$$P' = \left(\frac{33}{13}, \frac{-4}{13}\right).$$

■

Definição 1.30. *Seja P_0 um ponto fixado no plano e seja P um ponto do plano distinto de P_0. O* ***simétrico do ponto*** P ***em relação ao ponto*** P_0*, é o ponto P' que pertence à reta r que passa por P_0 e P e tal que $d(P_0, P') = d(P_0, P)$. Esta definição equivale a P_0 ser o ponto médio do segmento PQ.*

Exemplo 1.5.2. *Sejam $O = (0, 0)$ e $P = (1, 2)$, encontre o simétrico de P em relação a O.*

Solução: Pela definição queremos encontrar $P' = (x, y)$ tal que O seja o ponto médio entre P e P', daí,

$$\left(\frac{x + 1}{2}, \frac{y + 2}{2}\right) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (-1, -2).$$

■

No cotidiano dizemos muitas vezes que um objeto é “simétrico”sem nos preocuparmos com a definição exata do que é ser simétrico, contando apenas com a intuição geométrica e o contexto em questão. Vimos nas duas definições as simetrias de um ponto, agora precisaremos o que é um uma figura plana ser simétrica, que chamaremos de invariante por uma simetria do plano. Entendemos por **figura plana** qualquer conjunto de pontos do plano, neste caso temos a seguinte definição.

Definição 1.31. *Uma figura geométrica plana é chamada* ***invariante por uma simetria do plano*** *se o simétrico de qualquer ponto da figura também pertence à figura.*

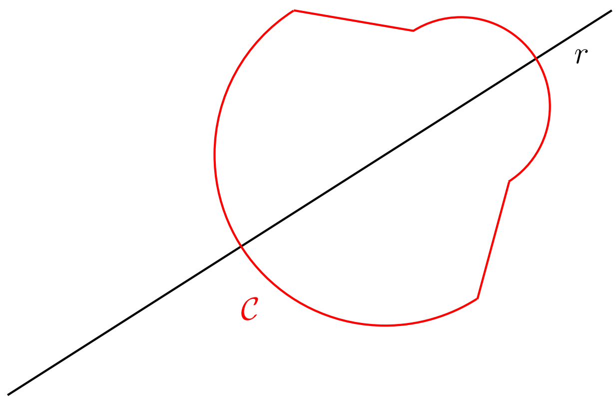


Figura 1.11: Curva simétrica em relação à reta r

Na figura 1.11 vemos que a curva $\mathcal{C}$ é invariante por simetria em relação à reta r pois qualquer de seus pontos tem o simétrico em relação à reta r ainda contido na curva. Faça um exercício, tente desenhar em uma folha em branco várias figuras planas simétricas em relação a um ponto ou em relação à uma reta. Você consegue imaginar uma figura plana simétrica em relação a uma reta e um ponto simultaneamente? E em relação a duas retas ou dois pontos distintos? E uma figura plana que é simétrica a infinitas retas?

Definição 1.32. *O simétrico de uma figura plana $\mathcal{X}$, em relação a uma reta ou a um ponto, é a figura plana $\mathcal{X}'$ formada por todos os simétricos dos pontos de $\mathcal{X}$.*

Exemplo 1.5.3. *Seja a reta $r: \ x - 2y = 0$. Determine o simétrico da reta $s: \ 2x + y - 2 = 0$ em relação à reta r.*

Solução: Queremos determinar a figura plana formada por todos os simétricos dos pontos da reta s em relação à reta r. Fazendo $x = a$ e isolando y na equação da reta s vemos que um ponto genérico dessa reta é da forma $P = (a, 2 - 2a)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Assim, vamos determinar o simétrico deste ponto em relação à reta r. Para isso procederemos como no Exemplo 1.5.1.

Sabemos que a reta $r' : (x, y) = (a, 2 - 2a) + (t, -2t), \ t \in \mathbb{R}$ é perpendicular à r passando por P. Assim, o ponto P' simétrico de P em relação a r é da forma $P' = (a + t, 2 - 2a - 2t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Vamos determinar esse t. Como a distância entre P' e r deve ser a mesma entre P e r temos que

$$\frac{|a + t - 2(2 - 2a - 2t)|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2(2 - 2a)|}{\sqrt{5}}.$$

Daí,

$$|-4+5a+5t| = |-4+5a|.$$

Com isso temos que

$$t = \frac{8-10a}{5}.$$

Substituindo t em P' obtemos que

$$P' = \left(\frac{8}{5} - a, \frac{-6}{5} + 2a\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{-6}{5}\right) + a(-1,2).$$

Como a está variando em todos os reais, vemos que P' é um ponto genérico da reta

$$s' : (x,y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{-6}{5}\right) + t(-1,2),\ t \in \mathbb{R}.$$

Logo o simétrico da reta s em relação à reta r é a reta s'.

■

No caso geral, seguindo os mesmos passos deste exemplo, podemos mostrar que as simetrias em relação a retas e pontos sempre levam retas em retas. Isto é, se aplicarmos sobre todos os pontos de uma reta uma dessas simetrias obtemos uma nova reta. Este é o conteúdo da seguinte proposição.

Proposição 1.33. *O simétrico de uma reta s, em relação a uma reta r ou a um ponto P, é também uma reta.*

Demonstração: Vide Proposições 16 e 17 em [2].

□

Exemplo 1.5.4. *Determine o simétrico da reta $s:\ 2x+y-2=0$ em relação a $P_0 = (-2,1)$.*

Solução: Pela Proposição 1.33 sabemos que o simétrico de s é uma reta. Portanto, para encontrá-la, precisamos apenas determinar dois de seus pontos. Note que $P_1 = (1,0)$ e $P_2 = (0,2)$ são pontos da reta s. Sejam $P_1' = (x_1, y_1)$ e $P_2' = (x_2, y_2)$ os respectivos simétricos de P_1 e P_2 em relação a P_0. Com isso, da definição de simétrico, temos que

$$\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1}{2}\right) = (-2,1) \Rightarrow (x_1,y_1) = (-5,2)$$

$$\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1+2}{2}\right) = (-2,1) \Rightarrow (x_2,y_2) = (-4,0)$$

Daí, temos que a reta s' simétrica de s em relação a P_0 é

$$s' : (x, y) = (-4, 0) + t(1, -2),\ t \in \mathbb{R}.$$

■

1.5.2 Cônicas

Agora vamos introduzir a definição geométrica de cada cônica e obter suas equações.

Definição 1.34. *Dados dois pontos no plano F_1 e F_2 uma* ***elipse*** *é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante. Os pontos F_1 e F_2 são chamados* ***focos*** *da elipse.*

Geometricamente é fácil visualizar e construir uma elipse. Vejamos uma maneira caseira de se construí-la. Coloque uma folha de papel sobre uma prancheta, escolha os pontos F_1 e F_2 que serão os focos da elipse e fixe pinos (alfinetes, pregos, percevejo e etc). Pegue um fio inextensível (barbante, linhas e etc) e amarre cada as pontas em cada um dos pinos. Se você não tiver uma prancheta e nem pinos você pode fazer um pequeno furo na folha, passar cada ponta por esses furos e prender na parte de trás da folha com uma fita adesiva. Agora pegue um lápis e faça-o deslizar sobre a folha de modo a manter o fio sempre esticado, conforme ilustra a figura 1.12.

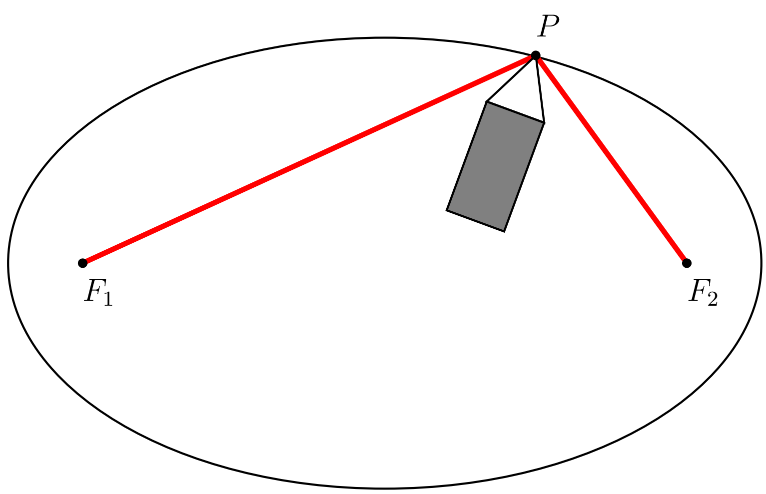
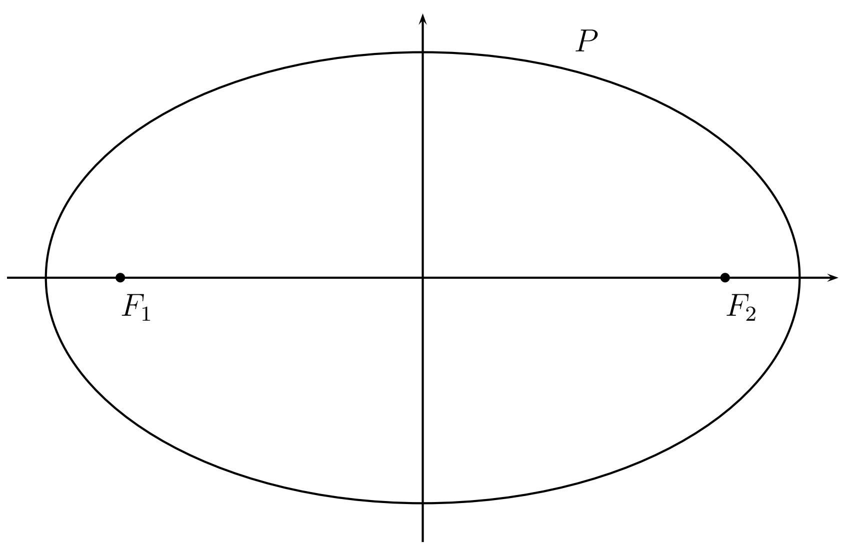


Figura 1.12: elipse

Como estamos trabalhando com geometria analítica, definido um novo objeto geométrico é natural nos perguntarmos: Qual é a representação algébrica deste objeto? Sendo a elipse uma curva esperamos que os pontos dela satisfaçam uma equação, como foi no caso da reta. Vejamos como construir uma equação para a elipse.

Para expressarmos algebricamente a elipse precisamos de um sistema de coordenadas. Escolheremos um sistema de coordenadas que deixe a equação da elipse o mais simples possível.

Dado uma elipse, considere um sistema de eixos cartesianos com eixo OX determinado por F_1 e F_2 com origem no ponto médio desses pontos.



Seja $c > 0$ a abscissa de F_2, isto é, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Neste caso, pela Definição 1.34, um ponto $P = (x, y)$ da elipse satisfaz

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k,$$

onde $k > 0$ é uma constante. Vamos desenvolver esta equação de modo a torná-la o mais simples possível. Podemos ver que

$$
\begin{aligned}
& d(P,F_1) + d(P,F_2) = k \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = k \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} = k - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\ & (x+c)^2+y^2 = \left(k - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x+c)^2+y^2 = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+2cx+c^2 = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2cx+c^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4cx = k^2 - 2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\ & 4cx - k^2 = -2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow\ & (4cx-k^2)^2 = \left(-2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 16c^2x^2 - 8k^2cx + k^4 = 4k^2\left((x-c)^2+y^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & 16c^2x^2 - 8k^2cx + k^4 = 4k^2x^2 - 8k^2cx + 4k^2c^2 + 4k^2y^2 \\
\Leftrightarrow\ & (4k^2-16c^2)x^2 + 4k^2y^2 = k^4 - 4k^2c^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4(k^2-4c^2)x^2 + 4k^2y^2 = k^2(k^2-4c^2)
\end{aligned}
$$

A equação neste ponto já está bem mais simples do que quando começamos, entretanto vamos simplificar ainda mais definindo novos parâmetros. Para isso faremos uso de um argumento geométrico a partir da construção da elipse. Seja $P_y = (0,b)$, com $b > 0$, o ponto da elipse que intercepta a parte positiva do eixo OY, como na figura 1.13. Com isso temos os triângulos retângulos P_yOF_2 e P_yOF_1, que são semelhantes. Daí temos que $d(O,P_y) = b$, $d(O,F_2) = c$ e $d(P_y,F_2) = \frac{k}{2}$. Do Teorema de Pitágoras concluímos que

$$b^2 + c^2 = \frac{k^2}{4} \Rightarrow 4b^2 = k^2 - 4c^2.$$

Substituindo na equação da elipse que obtivemos e tomando $a = \frac{k}{2}$ obtemos que

$$16b^2x^2 + 16a^2y^2 = 16a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por $16a^2b^2$ temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.5}$$

Esta equação é dita **equação canônica (ou reduzida) da elipse**.

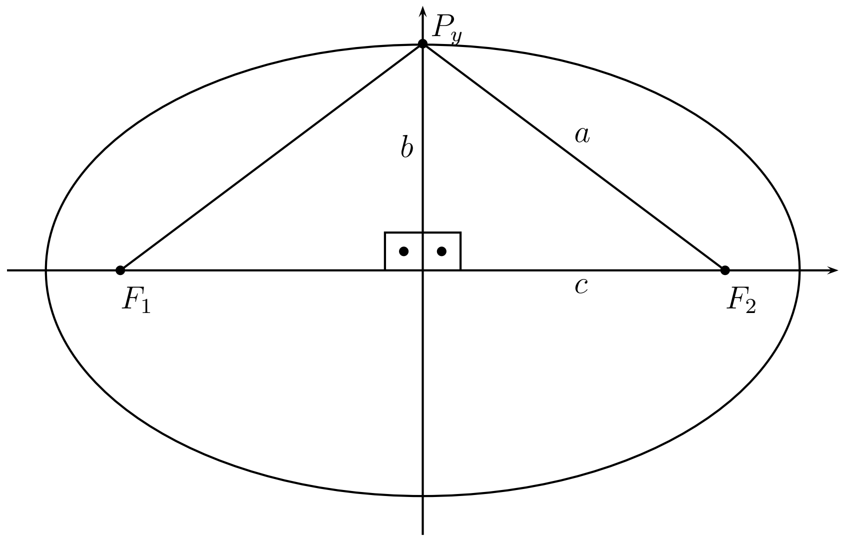


Figura 1.13:

Note que, a partir da equação canônica da reta, fazendo $y = 0$ temos que $x^2 = a^2$ o que implica que $x = -a$ ou $x = a$, isto é, os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ são os pontos da elipse que interceptam o eixo OX. Chamamos de **eixo maior** da elipse o segmento $\overline{A_1A_2}$, que tem comprimento $2a$. Chamamos de **eixo menor** o segmento formado pelos pontos de interseção da elipse com o eixo OY, que tem comprimento $2b$.

Se considerássemos os focos sobre o eixo OY obteríamos a mesma equação para a elipse exceto que b seria maior que a, donde concluímos que os focos estão situados no eixo maior da elipse.

Passemos a analisar as propriedades de simetria da elipse.

Proposição 1.35. *As elipses são invariantes por simetria em relação ao seus eixos e em relação ao seu centro.*

Demonstração: Dado um ponto $P = (x, y)$ da elipse sabemos que P satisfaz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Note que $P_1 = (-x, -y)$, $P_2 = (-x, y)$ e $P_3 = (x, -y)$ são os simétricos de P em relação à origem, ao eixo OY e em relação ao eixo OX respectivamente. Para verificarmos que P_1, P_2 e P_3 pertencem à elipse basta vermos que eles satisfazem a equação da elipse. Com efeito,

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y^2)}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y^2)}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Definição 1.36. *Dados dois pontos no plano F_1 e F_2 uma* ***hipérbole*** *é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante positiva menor que a distância entre os pontos F_1 e F_2. Os pontos F_1 e F_2 são chamados* ***focos*** *da hipérbole.*

Podemos desenhar uma hipérbole da seguinte forma. Pegue uma régua e faça um pequeno orifício em uma de suas extremidades. Marque em uma folha de papel os pontos F_1 e F_2 de modo que a distância entre eles seja menor que a régua. Fixe a régua através do orifício, usando um pino, em um dos focos de modo que ela possa girar livremente. Pegue um fio inextensível e fixe uma de suas extremidades na ponta da régua e a outra extremidade no outro foco. Estique o fio com um lápis de modo que ele fique encostado na régua, como na figura 1.14. Girando-se a régua temos um ramo da hipérbole. Repita o procedimento com o outro foco para obter o outro ramo.

Como no caso da elipse, vamos determinar uma equação para a hipérbole. Considere um sistema de eixos cartesianos com eixo OX determinado por F_1 e F_2 com origem no ponto médio desses pontos. Neste caso, assim como no da elipse, sendo $2c$ a distância entre os dois focos, $2a$ o valor absoluto da diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos e $c^2 = b^2 + a^2$, então a equação da hipérbole é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta equação é dita **equação canônica (ou reduzida) da hipérbole**.

Da equação canônica da hipérbole podemos tirar suas propriedades de simetria.

Proposição 1.37. *As hipérboles são invariantes por simetria em relação ao seus eixos e em relação ao seu centro.*

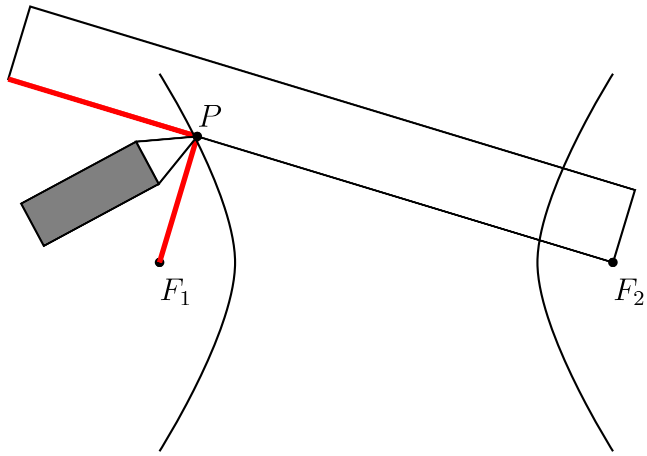


Figura 1.14: hipérbole

Demonstração: Análogo à Proposição 1.35.

□

Vejamos como fazer um esboço de uma hipérbole a partir da sua equação canônica. Já conhecemos, da Proposição 1.37 as simetrias da hipérbole. Fazendo $y = 0$ obtemos que $x = \pm a$, ou seja, os pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$, chamados de **vértices da hipérbole**, são os pontos onde a hipérbole intercepta o eixo OX. O segmento A_1A_2 é dito **eixo real ou transverso** da hipérbole. Fazendo $x = 0$ obtemos $y^2 = -b^2$, uma equação que não tem solução em números reais, o que significa que hipérbole não intercepta o eixo OY. Os pontos $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ não estão na hipérbole, mas desempenham um papel importante para traçar seu gráfico. O segmento B_1B_2 é dito **eixo imaginário** da hipérbole.

As retas verticais passando por A_1 e A_2 e as retas horizontais passando por B_1 e B_2 determinam um retângulo de vértices $C = (-a, b)$, $D = (a, b)$, $E = (a, -b)$ e $F = (-a, -b)$ cujas retas passando pelas diagonais têm equações $y = \pm\frac{b}{a}x$, chamadas **assíntotas da hipérbole**.

As assíntotas da hipérbole têm a seguinte propriedade: um ponto da hipérbole muito afastado da origem O está a uma distância muito pequena (próximo de zero) da assíntota. Na prática, isto significa que o desenho do gráfico da hipérbole se aproxima da assíntota quando o ponto da hipérbole se afasta do centro. Como resultado temos o gráfico da hipérbole na figura 1.15.

Daremos a seguir uma ideia da validade da propriedade das assíntotas. Observe que a equação da hipérbole pode ser escrita como

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2},$$

pois $x \neq 0$. Sabemos que quando $|x|$ é muito grande, x^2 também é muito grande. Logo, $\frac{b^2}{x^2} \approx 0$. Desta maneira, vemos que $\frac{y^2}{x^2} \approx \frac{b^2}{a^2}$. Concluímos então que $\frac{y}{x} \approx \pm\frac{b}{a}$, quando (x, y) é um ponto da hipérbole com $|x|$ muito grande.

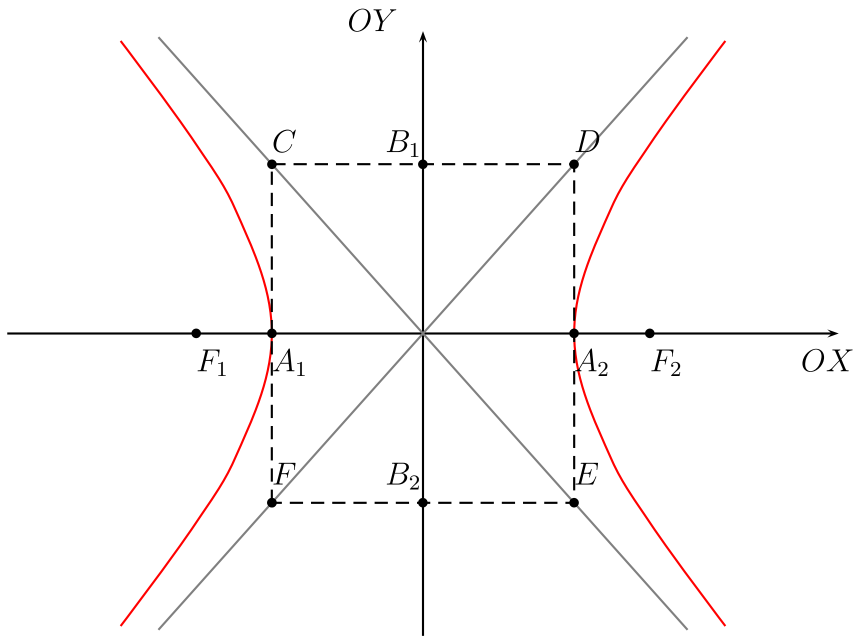


Figura 1.15: hipérbole

Definição 1.38. *Dados uma reta ℓ e um ponto F não pertencente a ℓ no plano. Uma* ***parábola*** *é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes da reta ℓ e do ponto F. A reta ℓ é chamada* ***diretriz****, o ponto F é dito* ***foco*** *e o ponto V de interseção da reta por F perpendicular a ℓ com a parábola é dito* ***vértice****.*

Podemos desenhar uma parábola usando uma folha, um esquadro, um fio inextensível, uma régua e um lápis da seguinte forma. Fixe a régua sobre a folha e escolha um ponto acima da régua para ser o foco. Coloque o esquadro com um dos catetos encostado na régua de modo que ele possa deslizar sobre a régua. Tome um fio de comprimento igual ao lado do cateto do esquadro que não está encostado na régua. Fixe uma das extremidades do fio no foco e a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na régua. Estique o fio com um lápis de forma que ele fique encostado no lado do esquadro perpendicular à régua. Deslize o esquadro sobre a régua e teremos um arco de parábola. Veja a figura 1.16.

Como no caso da elipse e da hipérbole, escolhendo-se um sistema de coordenadas conveniente podemos obter uma equação simples para a parábola. Dado uma parábola, considere um sistema de eixos cartesianos com eixo OY determinado pela reta perpendicular a ℓ passando por F e a origem O no vértice da parábola. Neste caso, sendo $2p$ a distância de F a ℓ, então a equação da parábola é dada por

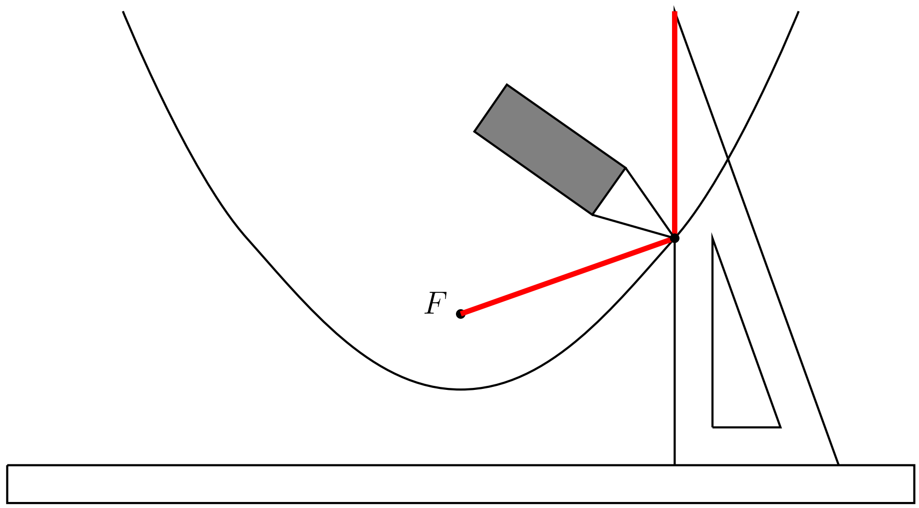


Figura 1.16: parábola

$$x^2 = 4py$$

Esta equação é dita **equação canônica (ou reduzida)** da parábola.

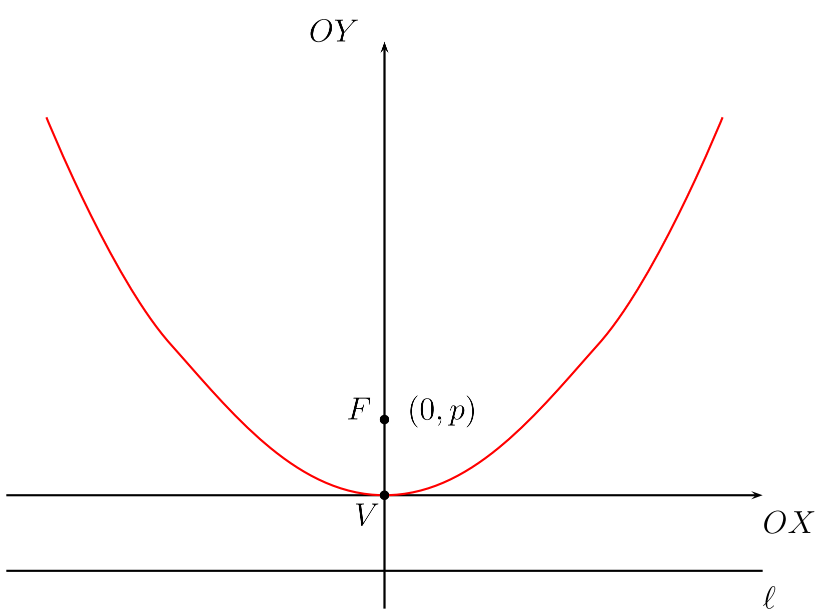


Figura 1.17: parábola

Proposição 1.39. *Uma parábola é invariante por simetria em relação à reta que contém o seu vértice e seu foco.*

Demonstração: Análogo à Proposição 1.35.

□

Quando os eixos coordenados não são os eixos de simetria da cônica sua equação não é apresentada na forma canônica. Neste caso, a cônica é o conjunto de soluções de uma equação do segundo grau da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

onde A, B, C não são simultaneamente nulos. Entretanto nem toda equação do segundo grau é uma das cônicas, como por exemplo a equação

$$x^2 + y^2 = 0$$

tem como solução apenas o ponto $(0,0)$. Por isso faz-se necessário a seguinte definição.

Definição 1.40. *Uma* ***cônica degenerada*** *é uma equação do segundo grau a duas variáveis em que o conjunto de soluções em $\mathbb{R}^2$ é vazio ou não é uma elipse, nem uma hipérbole e nem uma parábola.*

Exemplo 1.5.5. *Verifique que as seguintes equações são cônicas degeneradas*

1. $x^2 + y^2 = -1$
2. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 0$
3. $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 0$
4. $(y-2)^2 = 3$

Solução:

1. Como a soma dos quadrados de dois números reais é sempre positivo ou zero temos que a esta equação não tem solução, ou seja, o conjunto solução é vazio.

2. A soma dos quadrados de dois número é zero somente quando cada um é zero, daí,

$$\frac{x-1}{2} = 0 \text{ e } \frac{y-2}{3} = 0.$$

Assim, $x = 1$ e $y = 2$. Logo o conjunto solução desta equação é apenas o ponto $(1,2)$.

3. Note que o lado direito desta equação é um produto notável e portanto pode ser escrita da seguinte forma

$$\left(\frac{x-1}{5} - \frac{y-2}{3}\right)\left(\frac{x-1}{5} + \frac{y-2}{3}\right) = 0.$$

Daí,

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} \text{ ou } \frac{x-1}{5} = -\frac{y-2}{3}.$$

Portanto o conjunto solução da equação são duas retas.

4. Neste caso,

$$(y-2)^2 = 3 \Rightarrow |y-2| = \sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3} \text{ ou } y = 2-\sqrt{3}.$$

Logo as soluções desta equação são as duas retas horizontais passando pelos pontos $(0, 2+\sqrt{3})$ e $(0, 2-\sqrt{3})$ ■

1.5.3 Translação do sistema de coordenadas

Quando uma cônica tem equação na forma canônica sabemos dizer se trata-se de uma elipse, hipérbole ou parábola. Entretanto, como dissemos anteriormente, quando os eixos coordenados não são os eixos de simetria da cônica sua equação assume a forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

onde A, B, C não são simultaneamente nulos. Neste caso, como podemos determinar que tipo de cônica é?

Uma dessas situações ocorre quando o sistema de eixos tem a origem em posição diferente do centro da cônica mas os eixos são paralelos aos eixos de simetria. Neste caso dizemos que a foi cônica transladada da origem do sistema. Vejamos na seguinte definição

Definição 1.41. *Dados um sistema ortogonal OXY e um ponto O', a* ***translação de** OXY **para*** *O' é a construção de um novo sistem ortogonal $O'X'Y'$ traçando paralelas aos eixos do sistema OXY passando por O', preservando a orientação e a unidade de medida. O ponto O' é a origem do novo sistema de coordenadas.*

Dados um sistema de coordenadas OXY e a sua translação $O'X'Y'$, sabemos que dado um ponto P podemos determinar suas coordenadas nos dois sistemas. Neste caso, é natural a seguinte pergunta:Existe alguma relação entre essas coordenadas?

Dado um ponto P no plano. Sejam (x, y) suas coordenadas no sistema OXY. Denotemos por $(x', y')'$ as coordenadas de P no sistema $O'X'Y'$. Se (x_0, y_0) são as coordenadas de O' no sistema OXY, então podemos ver que

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

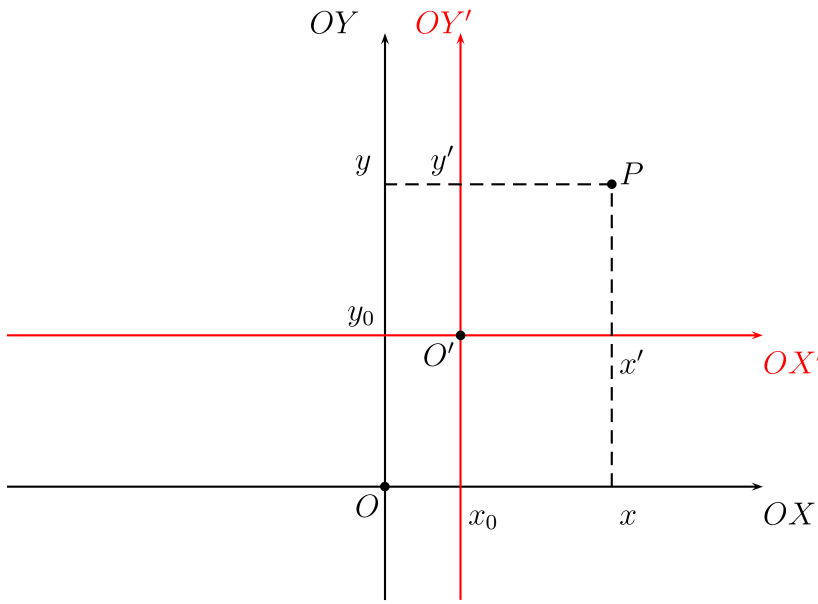


Figura 1.18: Sistema de eixos transladado

Exemplo 1.5.6. *Dado um sistema de coordenadas fixado OXY, seja $O' = (-2, 3)$ a origem de um novo sistema $O'X'Y'$ transladado. Se $P = (5, -1)'$ e r é uma reta de equação $2x' - y' + 1 = 0$ com respeito ao sistema $O'X'Y'$, encontre as coordenadas de P e a equação da reta r no sistema OXY.*

Solução: Temos a seguinte mudança de coordenadas.

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

Daí, substituindo as coordandas de P temos que

$$5 = x + 2 \quad \text{e} \quad -1 = y - 3 \Rightarrow x = 3 \quad \text{e} \; y = 2.$$

Assim, $P = (3, 2)$ no sistema OXY. Para encontrarmos a equação da reta r no sistema OXY basta substituir a mudança de coordenadas na equação $2x' - y' + 1 = 0$. Com isso temos que

$$2(x + 2) - (y - 3) + 1 = 0 \Rightarrow 2x - y + 8 = 0.$$

Logo a reta r tem a seguinte equação no sistema OXY

$$2x - y + 8 = 0.$$

■

Se $O' = (x_0, y_0)$ é um ponto no plano, então as equações abaixo são cônicas

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad y - y_0 = K(x-x_0)^2.$$

Verifiquemos esta afirmação para a primeira equação, as demais são análogas. Substituindo a mudança de coordenadas (1.6) obtemos

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Assim podemos dizer que um ponto $P = (x, y)$ no sistema OXY que satisfaz a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, também satisfaz a equação $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ no sistema $O'X'Y'$, onde $P = (x', y')'$. Esta última equação representa uma elipse no sistema $O'X'Y'$. Como uma translação da elipse não altera sua forma temos que a equação anterior também é uma equação de elipse.

Vejamos agora, através de um exemplo, como identificar uma cônica que não está na forma canônica e como esboçá-la.

Exemplo 1.5.7. *Identifique a cônica* $4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 23 = 0$ *e faça um esboço.*

Solução: Vamos completar quadrados dos termos em x e em y a fim de colocar a equação na forma canônica transladada. Note que

$$\begin{aligned}
& 4x^2 - 16y^2 - 24x - 24y + 23 = 0 \\
\Rightarrow\ & 4x^2 - 24x - 16y^2 - 24y + 23 = 0 \\
\Rightarrow\ & 4(x^2 - 6x) - 16\left(y^2 + \frac{3}{2}y\right) + 23 = 0 \\
\Rightarrow\ & 4(x^2 - 6x + 9 - 9) - 16\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 23 = 0 \\
\Rightarrow\ & 4(x-3)^2 - 16\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - 4 = 0 \\
\Rightarrow\ & (x-3)^2 - 4\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 \\
\Rightarrow\ & (x-3)^2 - \frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1
\end{aligned}$$

Logo a equação representa uma hipérbole transladada como origem em $\left(3, \frac{3}{4}\right)$.

■

Bibliografia

[1] BOULOS, P., AND CAMARGO., I. *Geometria analítica : um tratamento vetorial*. Makron Books do Brasil, São Paulo, 1987.

[2] GÓMEZ, J. D., FRENSEL, K. R., AND DO E. SANTOS., N. *Geometria analítica*, vol. 1. FAPERJ, Rio de Janeiro, 2004.

[3] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., AND MORGADO, A. C. *A matemática do Ensino Médio*, vol. 3. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Índice Remissivo

Nomenclature

$\overline{AB}$ segmento de reta

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ produto interno

AB segmento orientado

$AB \equiv CD$ segmentos equipolentes

$d(A, B)$ distância entre dois pontos

$d(P, r)$ distância de ponto à reta