e $\vec{s} = \overrightarrow{BC} = (0,-1,1)$. Então, $(\vec{r},\vec{s})$ é LI e as retas são concorrentes ou reversas. Tomamos um ponto de r, por exemplo, $A = (1,2,3)$; então $\overrightarrow{AB} = (0,3,-3)$ e $(\vec{r},\vec{s},\overrightarrow{AB})$ é LD, pois

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, r e s não são reversas, são concorrentes.

Exercícios

16-1 Estude a posição relativa das retas r e s.

(a) r: $X = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1)$ $\quad$ s: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

(b) r: $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad$ s: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ $\quad$ s: $X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$

(d) r: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{4} = z$ $\quad$ s: $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$

(e) r: $X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$ $\quad$ s: $X = (3,-4,4) + \lambda(1,-2,2)$

(f) r: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{5}$ $\quad$ s: $x = -y = \dfrac{z-1}{4}$

(g) r: $\dfrac{x+1}{2} = y = -z$ $\quad$ s: $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

(h) r: $x + 3 = \dfrac{2y-4}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ $\quad$ s: $X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$

16-2 Calcule m em cada caso, usando a informação dada sobre as retas

r: $\begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad$ s: $x = \dfrac{y}{m} = z$ $\quad$ t: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$

(a) r e s são paralelas.

(b) r, s e t são paralelas a um mesmo plano.

(c) r e t são concorrentes.

(d) s e t são coplanares.

(e) r e s são reversas.

16-3 No Exercício 16-1, obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado pelas retas r e s.

16-4 Sejam r: $X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$ e s: $X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r e s e obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado por elas.

16-5 Estude, segundo os valores de m e n, a posição relativa das retas r e s. Obtenha, quando for o caso, uma equação geral do plano determinado por elas.

$$r: \; X = (1,m,0) + \lambda(1,2,1) \qquad s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = nz - 1 \end{cases}$$

16-6 Dê condições sobre m e n para que as retas r e s determinem um plano:

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ nx - y - 2z + m + 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - nz + m + n = 0 \\ x + y - 2nz + 11 = 0 \end{cases}$$

16-7 Mostre que as retas r e s determinam um plano π e obtenha uma equação geral de π.

(a) r: $x - 1 = y = 2z$ $\qquad$ s: $x - 1 = y = z$

(b) r: $(x-1)/2 = (y-3)/3 = z/4$ $\qquad$ s: $x/2 = y/3 = (z-4)/4$

B Posição relativa de reta e plano

Para uma reta r e um plano π, são três as possibilidades: r estar *contida* em π, ou serem *paralelos*, ou serem *transversais*. Neste último caso, a interseção de r e π reduz-se a um único ponto; no segundo caso, essa interseção é vazia; e para que r esteja contida em π é suficiente que dois de seus pontos, distintos, pertençam a π, caso em que $r \cap \pi = r$.

Para estudar a posição relativa de r e π, utilizaremos o seguinte fato básico: *r é transversal a π se, e somente se, seu vetor diretor $\vec{r}$ não é paralelo a π* (equivalentemente, *r é paralela a π ou está contida em π se, e somente se, $\vec{r}$ é paralelo a π*). Lembremos que, para verificar se $\vec{r}$ é paralelo a π, dispomos de dois recursos: tomar um par $(\vec{u},\vec{v})$ de vetores diretores de π e analisar a dependência linear da tripla $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ (veja a Definição 6-1 (c)), ou aplicar a Proposição 14-21.

Dados $\vec{r} = (m,n,p)$ e π: $ax + by + cz + d = 0$, podemos então estudar a posição relativa de r e π seguindo o roteiro:

- Se $am + bn + cp \neq 0$, r e π são transversais.
- Se $am + bn + cp = 0$, r e π não são transversais. Para esclarecer se r está contida em π ou é paralela a π, basta escolher um ponto A de r e verificar se ele pertence a π.

Por outro lado, se $(\vec{u},\vec{v})$ é um par de vetores diretores de π, podemos adotar um roteiro alternativo (veja a Figura 16-2):

- Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ é LI, r e π são transversais.
- Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ é LD, r e π não são transversais, e, como antes, saberemos se r está contida em π ou se r e π são paralelos verificando se um ponto escolhido em r pertence ou não a π.

Há também o "método da interseção", que consiste em determinar $r \cap \pi$ usando os procedimentos do Capítulo 15 e interpretar os resultados obtidos sob o ponto de vista da posição relativa.

Logo, A não pertence a π e, portanto, r é paralela a π.

(c) As equações de r podem ser escritas sob a forma equivalente

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Vamos proceder como no Exercício Resolvido 15-11 (segundo modo) para obter um vetor diretor de r.

- Se adotarmos para y o valor 0, o sistema fica

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x = z \end{cases}$$

e tem por solução $x = z = 1$. Logo, $A = (1,0,1)$ é um ponto de r.

- Dando a x o valor 0, obtemos

$$\begin{cases} -3y + 2z = 3 \\ 2y = z \end{cases}$$

e, portanto, $y = 3$ e $z = 6$. O ponto $B = (0,3,6)$ pertence a r.

- Um vetor diretor de r é $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (-1,3,5)$.

Agora, repetimos o que foi feito nos itens (a) e (b): $\vec{u} = (1,1,1)$ e $\vec{v} = (2,1,0)$ são vetores diretores de π, e $(\vec{u},\vec{v},\vec{r})$ é LI, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

Logo, r e π são transversais.

Uma resolução alternativa para os três itens é obter uma equação geral de π e proceder como no Exercício Resolvido 16-2.

EXERCÍCIOS

16-8 Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de interseção P.

(a) r: $X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$ $\qquad$ π: $x - y - z = 2$

(b) r: $(x - 1)/2 = y = z$ $\qquad$ π: $X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$

(c) r: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ π: $X = (0,1/2,0) + \lambda(1,-1/2,0) + \mu(0,1,1)$

(d) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\pi: x + y = 2$

(e) $r: X = (0,0,0) + \lambda(1,4,1)$ $\pi: X = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,-1,0)$

(f) $r: (x + 2)/3 = y - 1 = (z + 3)/3$ $\pi: 3x - 6y - z = 0$

16-9 Calcule m para que r seja paralela a π:

$r: X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ $\pi: X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1)$

16-10 Calcule m e n para que r esteja contida em π.

(a) $r: X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m)$ $\pi: x - 3y + z = 1$

(b) $r: X = (m,3,n) + \lambda(1,1,n)$ $\pi: nx - ny + mz = 1$

16-11 Para que valores de m a reta $r: (x - 1)/m = y/2 = z/m$ é transversal ao plano $\pi: x + my + z = 0$?

16-12 Sejam $r: X = (n,2,0) + \lambda(2,m,n)$ e $\pi: nx - 3y + z = 1$. Usando, em cada caso, a informação dada, obtenha condições sobre m e n.

(a) r e π são paralelos. (b) r e π são transversais. (c) r está contida em π.

16-13 A reta t é paralela a Oxz, está contida em $\pi: x + 2y - z = 2$, e é concorrente com s. Obtenha uma equação vetorial de t, nos casos:

(a) $s: X = (2,1,1) + \lambda(1,0,2)$ (b) $s: X = (2,1,1) + \lambda(0,1,1)$

16-14 Nos itens do Exercício 16-1 em que r e s são reversas, obtenha uma equação geral do plano que contém r e é paralelo a s.

C Posição relativa de planos

As possibilidades para dois planos π_1 e π_2 são: serem *paralelos distintos*, ou *paralelos coincidentes* (isto é, iguais), ou *transversais*. Neste último caso, sua interseção é uma reta; no primeiro, é vazia; e no segundo, um plano ($\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$). Assim, se você obtiver, pelos métodos estudados no Capítulo 15, a interseção de π_1 e π_2, poderá descrever a sua posição relativa. Vamos procurar agora outros caminhos.

Quando os planos são descritos por equações na forma geral, podemos obter informações sobre a posição relativa analisando os coeficientes dessas equações, como veremos na Proposição 16-4. Para que você tenha uma idéia da praticidade do processo, eis alguns exemplos de como se aplica essa proposição.

- Os planos π_1: $2x - 3y + z - 4 = 0$ e π_2: $6x - 9y + 3z - 12 = 0$ são iguais, porque os coeficientes 2,–3,1,–4 e 6,–9,3,–12 são proporcionais.
- Os planos π_1: $2x - 3y + z - 4 = 0$ e π_2: $6x - 9y + 3z + 5 = 0$ são paralelos distintos, porque os coeficientes 2,–3,1 e 6,–9,3 são proporcionais, mas os termos independentes, –4 e 5, não estão na mesma proporção.

15-8 (a) π: $y - 1 = 0$

(c) (2,2,4) (0,2,4) (2,2,0) (0,2,0) π_1: $y - 2 = 0$

Pelo Corolário 14-22, π é paralelo a Oxz; logo, o mesmo ocorre com π_1, que tem, portanto, uma equação geral da forma $y + d = 0$.

15-9 (a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

(c) A interseção é o plano π_1 (igual a π_2).

(d) A interseção é vazia (planos paralelos, distintos).

15-10 (a) A interseção é a reta de equação $X = (3,-2,5) + \lambda(3,0,2)$.

(b) A interseção é vazia.

(c) A interseção é o próprio plano π_1, igual a π_2.

(d) A interseção é a reta de equação $X = (4,5,2) + \lambda(2,3,1)$.

15-11 $B = (2/3,2/3,-1/3)$; $C = (2/3,-1/3,2/3)$ ou $C = (2/3,5/3,-4/3)$.

15-12 Não daremos a resposta deste exercício, pelo seguinte motivo: há muitas maneiras de eliminar o parâmetro, e é grande a probabilidade de escolhermos um caminho diferente do seu e obtermos equações totalmente distintas das suas (no item (a), por exemplo, uma das equações de plano que encontramos foi $2x + 5y + 3z - 59 = 0$). Um recurso para conferir seus resultados é escolher dois pontos de r e verificar se as suas coordenadas satisfazem as duas equações de plano obtidas. Não se esqueça da condição sobre a proporcionalidade dos coeficientes.

15-13 (a) $X = (2,3,1) + \lambda(3,0,1)$ (b) $X = (3,1,4) + \lambda(0,1,3)$

15-14 O ponto comum é $P = (1,1,2)$ e o volume, 4/3.

15-15 $X = (1,0,0) + \lambda(-1,2,0)$. Se não fosse a condição "coordenadas inteiras", haveria três soluções.

15-16 $\vec{u} = (m,n,p)$ é paralelo a r se, e somente se, $\vec{u}$ é paralelo a π_1 e a π_2; pela Proposição 14-21, isso equivale a

$$a_1m + b_1n + c_1p = 0 \quad \text{e} \quad a_2m + b_2n + c_2p = 0.$$

15-17 Michelle acertou os três exercícios.

Capítulo 16

16-1 (a) Paralelas distintas.

(b) Concorrentes em $P = (1,-1,0)$.

(c) Reversas. (d) Coincidentes ($r = s$).

(e) Concorrentes em $P = (-2,6,-6)$.

(f) Concorrentes em $P = (-2,2,-7)$.

(g) Reversas. (h) Reversas.

16-2 (a) $m = 1$ (b) $m = 1$

(c) m é qualquer. (d) Não existe m.

(e) m é qualquer número real diferente de 0 e de 1.

16-3 (a) $3x - 4y - 10z + 3 = 0$ (b) $x - z - 1 = 0$

(e) $4x - y - 3z - 4 = 0$ (f) $17x - 7y - 6z + 6 = 0$

Note que, em (d), as retas são coplanares mas não *determinam* um plano, pois há infinitos planos que contêm r e s.

16-4 Se $m \neq 2/3$, as retas são reversas. Se $m = 2/3$, são concorrentes em $P = (-9,-5,-13)$ e determinam o plano de equação $2x - y - z = 0$.

16-5 Se $n = 2$, as retas são paralelas distintas para todo m e determinam o plano π: $(m + 1)x - 3y + (5 - m)z + 2m - 1 = 0$.

16-6 $n = -1$, ou ($n = 2$ e $m \neq 3$), ou ($n \neq 2$, $n \neq -1$ e $m + n = 5$). Nos dois primeiros casos, r e s são paralelas distintas. No terceiro, são concorrentes.

16-7 (a) $x - y - 1 = 0$; r e s são concorrentes em $P = (1,0,0)$.

(b) $8x - 4y - z + 4 = 0$; r e s são paralelas distintas.

16-8 (a) r e π são transversais; $P = (1,0,-1)$.

(b) r é paralela a π. (c) r está contida em π.

(d) r e π são paralelos.

(e) r é transversal a π; $P = (-1/9,-4/9,-1/9)$.

(f) r é paralela a π.

16-9 2

16-10 (a) $m = 1$, $n = 7$. (b) $m = 0$, $n = -1/3$.

16-11 Para qualquer valor não-nulo.

16-12 (a) $m = n \neq \pm\sqrt{7}$ (b) $m \neq n$ (c) $m = n = \pm\sqrt{7}$

16-13 (a) $X = (3,1,3) + \lambda(1,0,1)$ (b) Não existe a reta t.

16-14 (c) $4x - 2y - z + 3 = 0$ (g) $7x - 11y + 3z + 7 = 0$

(h) $5x - 4y + z + 22 = 0$

16-15 Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI ou $(\vec{u},\vec{v},\vec{t})$ é LI, os planos são transversais. Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD e $(\vec{u},\vec{v},\vec{t})$ também é LD, então os planos coincidem se A pertence a π_2, e são paralelos distintos se A não pertence a π_2.

16-16 (a) São iguais. (b) São transversais.

(c) São paralelos distintos. (d) São transversais.

(resolução rapidíssima para (d): o vetor (1,0,3) é paralelo a π_2, mas não a π_1, pois $1\cdot1 - 1\cdot0 + 2\cdot3 \neq 0$).

16-17 (a) Não existe m. (b) $-5/2$.

16-19 Os planos são transversais, qualquer que seja m.

16-20 Se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, então o vetor $\vec{n}_1 = (a_1,b_1,c_1)$ é paralelo a π_2 (Proposição 14-21), mas não é paralelo a π_1 (Exercício 14-34). Logo, π_1 e π_2 são transversais. A condição não é necessária; contra-exemplo: π_1: $x = 0$ e π_2: $x + y = 0$.

16-21 (a) π: $x - y + 3z + 3 = 0$ ou π: $x - y + 3z - 3 = 0$

(b) π: $x - y + 3z - 1 = 0$ ou π: $x - y + 3z + 1 = 0$

16-22 (a) $x + z - 2 = 0$ (b) $3x - 2y - 3 = 0$

16-23 $y - z - 1 = 0$

16-24 π: $x + 2y + 2z - 2 = 0$ (0,0,1) (0,1,0) (2,0,0) ou

π: $x - 2y + 2z + 2 = 0$ (0,0,−1) (0,1,0) (−2,0,0)

16-25 Não existe (usando a equação do feixe, obtém-se $\alpha = \beta = 0$). O motivo geométrico é que a reta $\pi_1 \cap \pi_2$ e a reta determinada pelos pontos (2,0,0) e (0,2,0) são reversas.

16-26 (a) Aplique a Proposição 16-10; mostre que $\alpha \neq 0$ e divida os dois membros de [16-4] por α. Unicidade: suponha