A DISTÂNCIA ENTRE PONTOS

Sejam $A = (x_1,y_1,z_1)$ e $B = (x_2,y_2,z_2)$. A distância $d(A,B)$ entre A e B é $\|\overrightarrow{BA}\|$, ou seja,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad [20\text{-}1]$$

EXERCÍCIOS

20-1 Calcule a distância entre os pontos P e Q, nos casos:

(a) $P = (0,-1,0)$, $Q = (-1,1,0)$. (b) $P = (-1,-3,4)$, $Q = (1,2,-8)$.

20-2 Obtenha os pontos da reta r: $2y + z = x + y = 2$ que distam 3 do ponto $A = (0,2,1)$.

20-1 Exercício Resolvido

Sejam $A = (x_1,y_1,z_1)$ e $B = (x_2,y_2,z_2)$ pontos distintos. Prove que o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam de A e B é um plano perpendicular ao segmento AB, que contém o seu ponto médio (veja a Figura 20-4). Esse plano é conhecido como *plano mediador* de AB.

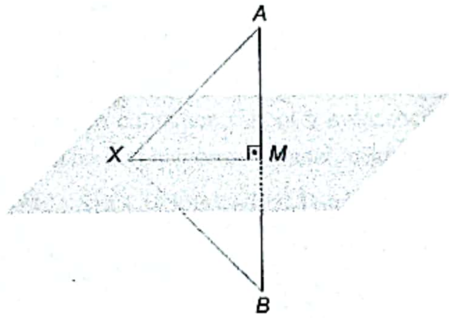

Figura 20-4

Resolução

Este exercício generaliza o Exercício 17-13. Um ponto $X = (x,y,z)$ pertence ao lugar geométrico se, e somente se, $d(X,A) = d(X,B)$, o que equivale a

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$$

que é equação geral de um plano π, pois A e B são distintos e, portanto, ao menos uma das diferenças $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ é não-nula. Além disso, um vetor normal a esse plano é $2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, ou seja, $2\overrightarrow{AB}$. Logo, o plano é perpendicular a AB. ◀

Como foi visto no Exercício Resolvido 13-6 (b), o ponto médio de AB é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Substituindo suas coordenadas no primeiro membro da equação de π, obtemos

$$(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) + (y_2 - y_1)(y_1 + y_2) + (z_2 - z_1)(z_1 + z_2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) =$$
$$(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$$

Portanto, M pertence a π.

EXERCÍCIOS

20-3 Qual é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de $A = (1,0,0)$ e $B = (-1,1,0)$ e também de $C = (0,2,0)$ e $D = (0,0,0)$? Descreva-o por meio de equações.

20-4 Obtenha os pontos da reta r que eqüidistam de A e B e comente as peculiaridades geométricas de cada caso.

(a) r: $x - 1 = 2y = z$ — $A = (1,1,0)$ — $B = (0,1,1)$

(b) r: $X = (0,0,4) + \lambda(4,2,-3)$ — $A = (2,2,5)$ — $B = (0,0,1)$

(c) r: $X = (2,3,-3) + \lambda(1,1,1)$ — $A = (1,1,0)$ — $B = (2,2,4)$

20-5 Descreva o lugar geométrico dos pontos do plano π que eqüidistam de A e B e comente as peculiaridades geométricas de cada caso.

(a) π: $X = (1,0,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(2,3,2)$ — $A = (1,2,2)$ — $B = (2,2,-1)$

(b) π: $2x + 2y - z = 0$ — $A = (0,1,1/2)$ — $B = (2,3,-1/2)$

(c) π: $x - 3y + z = 0$ — $A = (1,4,0)$ — $B = (3,-2,2)$

20-6 Prove que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam de três pontos dados, A, B e C, é:

(a) uma reta perpendicular ao plano ABC, se os três pontos não são colineares;

(b) o conjunto vazio, se A, B e C são colineares e $A \neq B \neq C \neq A$;

(c) um plano perpendicular à reta que contém A, B e C, se (apenas) dois desses pontos coincidem;

(d) o espaço $\mathbb{E}^3$, se $A = B = C$.

(Este exercício generaliza o Exercício 17-18.)

$\mathbb{R}^3$

20-7 Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam de A, B e C e determine as coordenadas do circuncentro do triângulo ABC, nos casos:

(a) $A = (0,2,1)$ — $B = (2,2,-1)$ — $C = (-2,0,3)$

(b) $A = (3,0,1)$ — $B = (2,1,0)$ — $C = (4,-1,2)$

Primeiro modo (algébrico) Pelo que vimos no item (a), o ponto procurado corresponde ao menor valor atingido pelo trinômio $\lambda^2 - 2\lambda/3 + 1/6$ quando λ percorre $[0,1]$, e é obtido para $\lambda = 1/3$. Trata-se do ponto $Q = (0,2,1)$. ◄

Segundo modo (geométrico) O ponto procurado é Q, projeção ortogonal de P sobre a reta AB, caso Q pertença ao segmento AB. Se não pertencer, o anel deve ser colocado na extremidade de AB mais próxima de P.

Como Q pertence à reta AB, podemos escrever $Q = A + \lambda\overrightarrow{AB} = (2 - 6\lambda, 6\lambda, 6\lambda - 1)$. Portanto, $\overrightarrow{PQ} = (-6\lambda, 6\lambda - 3, 6\lambda - 3)$ e, impondo a condição $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$, obtemos $-6(-6\lambda) + 6(6\lambda - 3) + 6(6\lambda - 3) = 0$, ou seja, $\lambda = 1/3$. Então, $Q = A + \overrightarrow{AB}/3$ pertence ao segmento AB, pois $0 < 1/3 < 1$. O ponto procurado é $Q = (0,2,1)$. ◄

Exercícios

20-8 Determine o ponto do segmento AB que está mais próximo de P, e o que está mais afastado.

(a) $A = (-2,3,3)$, $B = (2,-1,-1)$, $P = (-4,1,0)$.
(b) $A = (1,2,-3)$, $B = (4,5,0)$, $P = (1,0,-4)$.
(c) $A = (2,3,4)$, $B = (1,1,2)$, $P = (2,-6,5)$.
(d) $A = (5,1,-2)$, $B = (3,3,0)$, $P = (1,0,-2)$.

20-9 Sejam p um número real positivo, A e B dois pontos tais que $d(A,B) = p$, e n, um número real qualquer. Prove que o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbb{E}^3$ tais que $d(X,A)^2 - d(X,B)^2 = n$ é um plano perpendicular ao segmento AB, cuja interseção com a reta AB ou é o ponto B ou é o ponto que divide (A,B) na razão $\dfrac{p^2+n}{p^2-n}$ (para recordar este conceito, volte ao Capítulo 5).

B Distância de ponto a reta

Como já comentamos no início deste capítulo, um modo de obter a distância $d(P,r)$ do ponto P à reta r é determinar Q, projeção ortogonal de P sobre r, e calcular $d(P,Q)$ (Figura 20-1 (a)). Vamos apresentar agora uma alternativa que dispensa o conhecimento de Q. Sejam A e B dois pontos quaisquer de r, distintos. A área do triângulo ABP é $\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{AB}\|/2$; logo, se h é a altura relativa ao vértice P (Figura 20-6), então $\|\overrightarrow{AB}\|h/2 = \|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{AB}\|/2$ e, como $h = d(P,r)$,

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Indicando por $\vec{r}$ o vetor $\overrightarrow{AB}$, que é um vetor diretor de r, obtemos

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} \qquad \textbf{[20-2]}$$

em que $\vec{r}$ é um vetor diretor e A é um ponto de r, ambos escolhidos arbitrariamente.

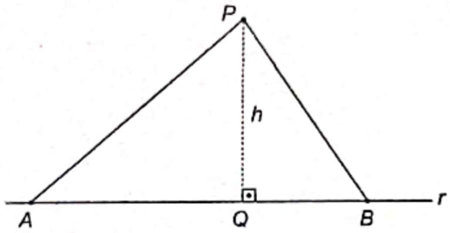

Figura 20-6

20-3 *Exercício Resolvido*

Calcule a distância de $P = (1,1,-1)$ à interseção de π_1: $x - y = 1$ e π_2: $x + y - z = 0$.

Resolução

Dando a x o valor 0 nas equações de π_1 e π_2, obtemos o ponto $A = (0,-1,-1)$, que pertence a r; dando o valor 1, obtemos $B = (1,0,1)$. Logo, $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2)$ é um vetor diretor de r e $\overrightarrow{AP} = (1,2,0)$. Substituímos em [20-2]:

$$d(P,r) = \frac{\|(1,2,0)\wedge(1,1,2)\|}{\|(1,1,2)\|} = \frac{\|(4,-2,-1)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Exercícios

20-10 Calcule a distância do ponto P à reta r.

(a) $P = (0,-1,0)$, r: $x = 2y - 3 = 2z - 1$.

(b) $P = (1,0,1)$, r: $x = 2y = 3z$.

(c) $P = (1,-1,4)$, r: $(x - 2)/4 = y/(-3) = (1 - z)/2$.

(d) $P = (-2,0,1)$, r: $X = (1,-2,0) + \lambda(3,2,1)$.

20-11 Obtenha os pontos da interseção dos planos π_1: $x + y = 2$ e π_2: $x = y + z$ que distam $\sqrt{14/3}$ da reta s: $x = y = z + 1$.

20-12 A diagonal BD de um quadrado está contida em r: $x - 1 = y - z = 0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três.

20-13 Obtenha os pontos da reta r que eqüidistam das retas s e t:

(a) r: $x - 1 = 2y = z$	s: $x = y = 0$	t: $x - 2 = z = 0$
(b) r: $x = y = z$	s: $X = (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$	t: $X = (0,0,1) + \lambda(1,0,-1)$

20-14 Verifique para quais pontos X da reta r a área do triângulo ABX é a menor possível e comente as peculiaridades geométricas de cada caso.

(a) $A = (2,3,1)$	$B = (7,1,5)$	r: $X = (-4,6,1) + \lambda(1,2,2)$
(b) $A = (1,0,3)$	$B = (2,1,2)$	r: $2x - y + z = 0 = x + z - 1$
(c) $A = (2,0,0)$	$B = (3,1,0)$	r: $X = (3,1,8) + \lambda(1,1,2)$
(d) $A = (3,2,1)$	$B = (0,1,2)$	r: $x = 2y - z = y - 2z + 3$

20-4 *Exercício Resolvido*

Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista $\sqrt{20}/3$ do ponto $P = (1,0,1)$, está contida em π: $x - 4y + z = 0$ e é paralela a s: $X = (1,1,0) + \lambda(2,1,2)$.

e π_2: $2y - z = 1$. Portanto, a transformação do sistema das equações [20-3] e [20-4] em [20-5] corresponde à substituição da superfície S pelo par de planos π_1 e π_2, sem afetar a interseção: $\pi \cap S = \pi \cap (\pi_1 \cup \pi_2)$. Veja a Figura 20-7 (b).

Exercícios

20-15 Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1,2,1)$, é concorrente com s: $X = (-1,1,1) + \lambda(0,-1,2)$ e paralela a t: $2x - z - 1 = y = 2$.

20-16 Obtenha uma equação vetorial da reta r contida no plano π: $y = z$, sabendo que a medida angular entre r e s: $X = (1,1,2) + \lambda(1,-1,0)$ é 60° e que r dista 1 do ponto $P = (1,0,0)$.

20-17 ◈ Mostre que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam de r: $x = y = z$, s: $x - z = y = 0$ e $A = (1,0,1)$ é a reunião de duas retas paralelas, e obtenha equações dessas retas.

20-18 Mostre que o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam das retas r: $x + y - 1 = z = 0$ e s: $x + z - 1 = y = 0$ é a reunião de dois planos transversais, e obtenha equações desses planos.

20-19 Descreva o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam das retas r: $x - 1 = y + z = 3$, s: $3x + y + z = x - y - z = 0$ e t: $x - y = x + z = 1 + z$.

20-6 *Exercício Resolvido*

Deduza a fórmula [20-2] usando o fato de que existe um único ponto em r cuja distância a P é igual a $d(P,r)$.

Resolução

Sejam A um ponto de r, distinto de P, e $\vec{r}$ um vetor diretor. Indiquemos $d(P,r)$ por d, e seja Q o (único) ponto da reta tal que $d(P,Q) = d$. Então existe λ real tal que $Q = A + \lambda\vec{r}$, e portanto:

$$d^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 = \|\overrightarrow{AP} - \lambda\vec{r}\|^2 = \|\overrightarrow{AP}\|^2 - 2(\vec{r}\cdot\overrightarrow{AP})\lambda + \lambda^2\|\vec{r}\|^2$$

Logo,

$$\|\vec{r}\|^2\lambda^2 - 2(\vec{r}\cdot\overrightarrow{AP})\lambda + \|\overrightarrow{AP}\|^2 - d^2 = 0$$

Como Q é o único ponto de r tal que $d(P,Q) = d$, esta equação de segundo grau em λ tem uma única solução e, portanto, seu discriminante é nulo:

$$\Delta = 4(\vec{r}\cdot\overrightarrow{AP})^2 - 4\|\vec{r}\|^2(\|\overrightarrow{AP}\|^2 - d^2) = 0$$

isto é,

$$d^2 = \frac{\|\vec{r}\|^2\|\overrightarrow{AP}\|^2 - (\vec{r}\cdot\overrightarrow{AP})^2}{\|\vec{r}\|^2} \qquad \textbf{[20-6]}$$

O vetor $\overrightarrow{AP}$ não é nulo, pois $A \neq P$; logo, podemos considerar a medida angular θ entre $\vec{r}$ e $\overrightarrow{AP}$. Então, devido a [20-6] e à igualdade $1 - \cos^2\theta = \mathrm{sen}^2\theta$,

Exercícios

20-21 Calcule a distância do ponto P ao plano π.

(a) $P = (0,0,-6)$ $\quad\pi: x - 2y - 2z - 6 = 0$

(b) $P = (1,1,15/6)$ $\quad\pi: 4x - 6y + 12z + 21 = 0$

(c) $P = (9,2,-2)$ $\quad\pi: X = (0,-5,0) + \lambda(0,5/12,1) + \mu(1,0,0)$

(d) $P = (1,1,1)$ $\quad\pi: 2x - y + 2z - 3 = 0$

20-22 Calcule a distância do ponto de interseção de r e s ao plano determinado por t e h, sendo

$r: X = (1,3,4) + \lambda(1,2,3)$ $\quad s: X = (1,1,0) + \lambda(-1,0,1)$

$t: X = (0,1,0) + \lambda(0,6,1)$ $\quad h: x = y - 6z + 8 = 2x - 3$

20-23 As retas r, s e t determinam, com o plano π, um tetraedro. Calcule a altura relativa à face situada em π, sendo

$\pi: x + y - z + 1 = 0$ $\quad r: x = y = z + 1$ $\quad s: x - y = z + 1 = 0$ $\quad t: x - y - z = 1 + x = 1$

20-24 Mostre que os pontos $A = (-2,0,1)$, $B = (0,0,-1)$, $C = (1,1,1)$, $D = (-2,-1,-2)$ e $E = (1,2,2)$ são vértices de uma pirâmide e calcule seu volume.

20-25 Calcule a distância do segmento PQ ao plano $\pi: 2x - 2y + z - 6 = 0$, nos casos:

(a) $P = (1,0,0)$, $Q = (2,3,2)$. $\quad$ (b) $P = (2,1,5)$, $Q = (1,1,1)$.

(c) $P = (3,0,-1)$, $Q = (-1,-2,3)$.

20-26 Obtenha os pontos da reta $r: x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi: x - 2y - z = 1$.

20-27 Determine os pontos da reta r que eqüidistam dos planos π_1 e π_2.

(a) $r: X = (0,1,1) + \lambda(1,1,2)$ $\quad\pi_1: x + 2y - z - 3 = 0$ $\quad\pi_2: x - y + 2z = 1$

(b) $r: x - 1 = 2y = z$ $\quad\pi_1: 2x - 3y - 4z - 3 = 0$ $\quad\pi_2: 4x - 3y - 2z + 3 = 0$

20-8 *Exercício Resolvido*

Obtenha uma equação geral do plano π que contém a reta $r: x - y = x + 2z = x + z$ e dista 2 do ponto $P = (1,0,2)$.

Resolução

O sistema de equações que descreve r é equivalente a

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(equações na forma planar). Como π pertence ao feixe de planos que contêm r, uma equação geral de π tem a forma

$$\alpha y + (2\alpha + \beta)z = 0 \qquad \textbf{[20-9]}$$

em que α e β não são ambos nulos. Aplicando [20-8], obtemos

20-11 Observação A caracterização feita no Exercício Resolvido 20-10 permite escrever equações gerais dos planos bissetores com facilidade, sem recorrer a medidas angulares: basta impor a condição $d(X,\pi_1) = d(X,\pi_2)$ a um ponto genérico $X = (x,y,z)$. Por exemplo, se π_1 e π_2 têm equações gerais $2x - 2y - z - 4 = 0$ e $4x - 3z + 1 = 0$, $d(X,\pi_1) = d(X,\pi_2)$ equivale a

$$\frac{|2x - 2y - z - 4|}{3} = \frac{|4x - 3z + 1|}{5}$$

isto é, $22x - 10y - 14z - 17 = 0$ ou $2x + 10y - 4z + 23 = 0$. Logo, estas duas últimas são equações gerais dos planos bissetores dos diedros determinados por π_1 e π_2.

Exercícios

20-33 Descreva o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ que eqüidistam dos planos π_1: $x + y - z = 0$, π_2: $x - y - z - 2 = 0$ e π_3: $x + y + z = 1$.

20-34 Descreva o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{E}^3$ cujas distâncias a π_1: $2x - y + 2z - 6 = 0$ são os dobros de suas distâncias a π_2: $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

20-35 (a) Obtenha equações gerais dos dois planos bissetores dos diedros determinados pelos planos π_1: $x - 2y + 2z - 1 = 0$ e π_2: $4x + 3y = 0$.

(b) Confira o resultado obtido no item (a), mostrando que cada um dos planos encontrados contém a reta $\pi_1 \cap \pi_2$ e forma ângulos congruentes com π_1 e π_2.

(c) Verifique que os planos bissetores são perpendiculares.

20-36 Obtenha uma equação geral do plano bissetor do diedro agudo determinado pelos planos π_1: $x - 2y + 3z = 0$ e π_2: $2x + y - 3z = 0$.

20-37 Um dos diedros determinados pelos planos π_1: $x + 2y - 2z - 1 = 0$ e π_2: $2x + y + 2z + 2 = 0$ contém a origem $O = (0,0,0)$. Obtenha uma equação geral do seu plano bissetor.

D Distância entre retas

A distância $d(r,s)$ entre as retas r e s pode ser calculada, como já foi dito, com o auxílio de uma reta t perpendicular a ambas: se t intercepta r e s em P e Q, então $d(r,s) = d(P,Q)$. Sempre existe a reta t: se r e s são paralelas, há infinitas, e se r e s são concorrentes ou reversas, t é única (Figura 20-2). Vejamos agora como é possível calcular $d(r,s)$ sem conhecer t, P e Q; vamos considerar separadamente três casos.

- *r e s são reversas.* Existe um único plano π que contém r e é paralelo a s; se B é um ponto qualquer de s, então $d(r,s) = d(B,\pi)$ (Figura 20-10). Um vetor normal a π é $\vec{r} \wedge \vec{s}$; escolhendo um ponto A qualquer de r e aplicando [20-7] para calcular $d(B,\pi)$, obtemos

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \qquad \textbf{[20-10]}$$

EXERCÍCIOS

20-38 Calcule a distância entre as retas r e s.

(a) r: $X = (2,1,0) + \lambda(1,-1,1)$ s: $x + y + z = 2x - y - 1 = 0$

(b) r: $(x + 4)/3 = y/4 = (z + 5)/(-2)$ s: $X = (21,-5,2) + \lambda(6,-4,-1)$

(c) r: $y = 3z - 2 = 3x + 1$ s: $3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$

(d) r: $(x - 1)/(-2) = 2y = z$ s: $X = (0,0,2) + \lambda(-2,1/2,1)$

(e) r: $x = (y - 3)/2 = z - 2$ s: $x - 3 = (y + 1)/2 = z - 2$

20-39 Sendo r: $X = (1,0,2) + \lambda(0,0,2)$, s: $X = (-1,0,1) + \lambda(1,1,0)$ e t: $X = (0,0,0) + \lambda(1,-1,0)$, calcule a distância entre r e a reta perpendicular comum a s e t.

20-14 *Exercício Resolvido*

Sejam r e s retas reversas, e t a reta perpendicular comum a elas; indiquemos por P e Q, respectivamente, os pontos de interseção de t com r e s. Mostre que, quanto mais próximo um ponto de r estiver de P, mais próximo ele estará de s.

Resolução

Seja X um ponto genérico de r. Considere o sistema de coordenadas de origem P e base B = $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ definida assim (acompanhe na Figura 20-11): $\vec{i}$ é unitário e paralelo a r, $\vec{k}$ é o versor de $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{i}$ (B é ortonormal, positiva). Em relação a esse sistema, podemos escrever: $P = (0,0,0)$, $Q = (0,0,c)$, $X = (x,0,0)$. Seja $\vec{s}$ um vetor diretor unitário de s; em relação à base B, $\vec{s} = (m,n,0)$, pois $\vec{s}\cdot\vec{k} = 0$. Então

$$d^2(X,s) = \frac{\|\overrightarrow{QX}\wedge\vec{s}\|^2}{\|\vec{s}\|^2} = \|(x,0,-c)\wedge(m,n,0)\|^2 = \|(cn,-cm,xn)\|^2 = c^2n^2 + c^2m^2 + x^2n^2$$

Logo, quanto mais próximo X estiver de P, menor será x^2 e, portanto, menor será $d(X,s)$.

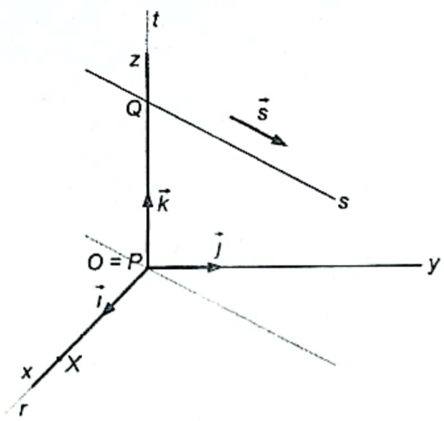

Figura 20-11

EXERCÍCIO

20-40 Calcule a distância do segmento AB à reta s, nos casos

(a) $A = (1,1,0)$ $B = (2,1,1)$ s: $X = (-1,-1,6) + \lambda(1,4,3)$

(b) $A = (2,3,0)$ $B = (-1,0,6)$ s: $X = (0,-3,-1) + \lambda(1,-1,0)$

20-15 ***Exercício Resolvido***

Obtenha uma reta r que contém o ponto $A = (1,1,2)$, é paralela a π: $x - 2y + 2z - 4 = 0$ e dista $1/\sqrt{2}$ da reta s: $X = (3,1,1) + \lambda(4,1,-1)$.

Resolução

Já conhecemos um ponto de r (o ponto A); falta-nos um vetor diretor $\vec{r} = (m,n,p)$. Como r é paralela a π, o produto escalar de $\vec{r}$ por $(1,-2,2)$, que é um vetor normal a π, é nulo. Portanto,

$$m - 2n + 2p = 0 \qquad \textbf{[20-11]}$$

Devemos ser cautelosos ao utilizar a informação $d(r,s) = 1/\sqrt{2}$, pois não sabemos se r é ou não é paralela a s. Vamos considerar as duas possibilidades.

Primeiro caso Suponhamos que a reta procurada não seja paralela a s. Então, $\vec{r}\wedge\vec{s} \neq \vec{0}$, e podemos aplicar a fórmula [20-10] usando os pontos $A = (1,1,2)$ de r e $B = (3,1,1)$ de s, e os vetores $\vec{r} = (m,n,p)$, paralelo a r, e $\vec{s} = (4,1,-1)$, paralelo a s:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|(2,0,-1)\cdot(m,n,p)\wedge(4,1,-1)|}{\|(m,n,p)\wedge(4,1,-1)\|} \qquad \textbf{[20-12]}$$

Como

$$\begin{aligned}(2,0,-1)\cdot(m,n,p)\wedge(4,1,-1) &= (2,0,-1)\cdot(-n-p, m+4p, m-4n)\\ &= -m + 2n - 2p\\ &= -(m - 2n + 2p)\end{aligned}$$

e, devido a [20-11], esta última expressão é igual a 0, [20-12] torna-se $1/\sqrt{2} = 0$, o que significa que não existe solução neste primeiro caso.

Segundo caso Se r for paralela a s, o que nos impede de aplicar a fórmula [20-10], então r: $X = (1,1,2) + \lambda(4,1,-1)$. Devemos verificar se esta reta satisfaz as condições do enunciado, para aceitá-la ou não como solução. Ela contém o ponto A e é paralela a π (pois $(4,1,-1)\cdot(1,-2,2) = 0$). Quanto à sua distância a s,

$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{s}\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\|(1,-2,2)\|}{\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A reta r: $X = (1,1,2) + \lambda(4,1,-1)$ é, portanto, a única solução (e não pôde ser obtida por aplicação da fórmula [20-10]). ◀

Exercícios

20-41 Determine a reta r que contém o ponto A, é paralela ao plano π e dista d da reta s.

(a) $A = (1,3,-1)$	π: $x + z = 2$	s: $x - z = y + 2 = z - x + 4$	$d = 3$
(b) $A = (1,2,0)$	π: $x + y + z = 1$	s: $X = (0,3,2) + \lambda(1,1,0)$	$d = 2$

20-42 Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $A = (0,0,3)$, está contida em π: $x + z = 3$ e dista 3 de Oy.

$$d(s,t) = d(P,s) = \frac{\|\overrightarrow{OP} \wedge \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\|(0,1,1) \wedge (0,1,0)\|}{\|(0,1,0)\|} = \|(-1,0,0)\| = 1$$

A reta t: $X = (0,1,1) + \lambda(0,1,0)$ é, portanto, uma segunda solução (e não pôde ser obtida por aplicação da fórmula [20-10]).

Exercícios

20-44 Dadas as retas r: $X = (0,0,1) + \lambda(1,1,0)$ e s: $X = (2,0,1) + \lambda(0,0,1)$, e os pontos $P = (1,0,1)$ e $Q = (2,1,1)$, obtenha uma equação vetorial da reta que contém P, é concorrente com r e eqüidistante de Q e s.

20-45 Obtenha uma equação vetorial da reta que contém a origem, dista 2 de s: $X = (0,1,2) + \lambda(0,1,0)$ e forma ângulos congruentes com t: $X = (1,1,2) + \lambda(1,-1,0)$ e h: $X = (2,3,-1) + \lambda(1,1,0)$.

20-46 Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto $A = (1,1,1)$, está à distância $1/\sqrt{2}$ de s: $X = (0,1,0) + \lambda(0,0,1)$ e forma com π: $2x - z = 0$ um ângulo cujo co-seno é $\sqrt{7/15}$.

20-47 Obtenha uma equação vetorial da reta que contém o ponto $A = (2,1,4)$, forma ângulo de 45° com a reta t, e dista 6 da reta s, sendo

$$t: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 8 + \lambda \end{cases}$$

20-48 Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do eixo das abscissas, está contida no plano π_1: $x + y = 0$ e forma ângulo de 30° com o plano π_2: $y - z = 1$.

20-49 ◆ Descreva, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbb{E}^3$ tais que a distância entre a reta r: $X = (3,2,1) + \lambda(0,1,2)$ e a reta s determinada por B e X seja 3.

(a) $B = (0,2,1)$ (b) $B = (0,0,2)$ (c) $B = (3,1,0)$

20-50 Participando do "Show do Milhão", Angelique ouviu do apresentador:

"Próxima pergunta, valendo R$ 100.000,00: a reta r contém o ponto $P = (0,0,2)$ e é paralela ao plano Oxy. Diga qual das alternativas não pode ser a distância de r à reta s: $X = (1,2,1) + \lambda(0,1,0)$:

(A) $1/\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $2/\sqrt{2}$

Angelique, você tem trinta segundos para a resposta."

Se Angelique pedisse ajuda aos universitários e você fosse um deles, que alternativa indicaria?

20-51 Interprete o segundo membro de [20-10] como:

(a) quociente de um volume por uma área;

(b) comprimento da projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

19-24 Duas soluções: $X = (-1,3,-1) + \lambda(2,2,1)$

$X = (-1,3,-1) + \lambda(46,86,-17)$

19-25 Duas soluções: $X = (0,1,0) + \lambda(1,-2,1)$

$X = (0,1,0) + \lambda(83,-523,134)$

Use a técnica do λ para determinar o ponto de interseção das retas r e s.

19-26 Duas soluções: $x + y + 5z - 4 = 0$ e $7x - 2y - z + 8 = 0$.

19-27 Use [9-12]. A Figura R-19-27 ilustra, num caso particular, a afirmação feita no enunciado; você se lembra dos casos de congruência para triângulos retângulos?

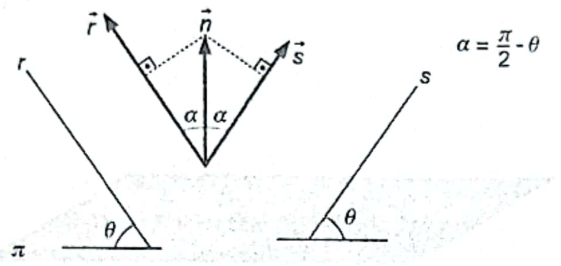

Figura R-19-27

19-28 (a) $\arccos(2/\sqrt{66})$ (b) $\arccos(1/\sqrt{3})$ (c) $\pi/4$

19-29 (a) Duas soluções: $2x - 3y + z - 5 = 0$ e $3x - y - 2z - 4 = 0$.

(b) Duas soluções: $x + y + z - 8 = 0$ e $x - y + z - 8 = 0$.

19-30 Três soluções: $x + z = 0$, $x - z = 0$ e $x + 4y + z = 0$.

19-31 $\arccos(9/\sqrt{95})$

19-32 Duas soluções: $x + y - 2 = 0$ e $x - y - 1 = 0$.

19-33 Duas soluções: $x + \sqrt{5}y + \sqrt{2}z - 2 - 2\sqrt{5} = 0$

$x - \sqrt{5}y + \sqrt{2}z - 2 + 2\sqrt{5} = 0$

19-34 (a) Sim. (b) Sim. (c) Não.

19-35 É o segmento de extremidades $A = (-2,-4,-2)$ e $B = (1,2,1)$, que pode ser descrito por $X = (0,0,0) + \lambda(1,2,1)$, $-2 \leq \lambda \leq 1$.

19-36 Somente π_2.

19-37 (a) É um triângulo; um dos vértices é D e os outros dois são pontos interiores às arestas AB e BC.

(b) É o ponto A.

(c) É um quadrilátero cujos vértices são interiores às arestas AB, AC, BD e CD.

(d) É um triângulo de lado AB cujo terceiro vértice é interior à aresta CD.

(d) É a face BCD.

Verifique quais pares de vértices do tetraedro são separados por π e tire conclusões.

19-38 (a) É o ponto Q. (b) $(4/3,1,1/3)$ (c) $(5/4,3/4,1/4)$

Se P e Q são separados por π, ou se apenas um deles pertence a π, então, pela propriedade triangular (*em qualquer triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro*), o ponto procurado é o ponto de interseção de π com a reta PQ. Se P e Q pertencem ao mesmo semi-espaço aberto de origem π e R é o ponto simétrico de Q em relação a π, a troca de Q por R no enunciado não afeta a resposta. Recai-se, assim, no caso anterior. Finalmente, se P e Q pertencem ambos a π, as soluções são os pontos do segmento PQ.

19-39 (a) $(23/3,7/3,-1/3)$ (b) $(-13/4,-9/4,-7/4)$

(c) É o ponto Q.

Se P e Q pertencem ao mesmo semi-espaço aberto de origem π e a reta PQ não é paralela a π, ou se apenas um desses dois pontos pertence ao plano, então o ponto procurado é aquele em que a reta PQ intercepta π (porque *o comprimento de um lado qualquer de um triângulo é maior que o módulo da diferença entre os comprimentos dos outros dois*). Se a reta PQ é paralela a π, o valor máximo não é atingido (veja o Exercício Resolvido 19-14). Se P e Q são separados por π, trocamos Q por seu simétrico em relação ao plano; isso não afeta a resposta, e recaímos no caso anterior. Finalmente, se P e Q pertencem a π, há infinitas soluções: são os pontos da reta PQ que não são interiores ao segmento PQ.

Capítulo 20

20-1 (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{173}$

20-2 $(2,0,2)$ e $(0,2,-2)$.

20-3 É a reta de equação vetorial $X = (1/4,1,0) + \lambda(0,0,1)$, interseção dos planos mediadores de AB e CD.

20-4 (a) Não existem tais pontos, pois r é paralela ao plano mediador de AB.

(b) Qualquer ponto de r é solução, pois r está contida no plano mediador de AB.

(c) É o ponto $(5,6,0)$, em que r intercepta o plano mediador de AB.

20-5 (a) É a reta r: $X = (3/2,1,1/2) + \lambda(0,1,0)$, pois o plano mediador de AB e π são transversais, e sua interseção é r.

(b) É o conjunto vazio, pois o plano mediador de AB e π são paralelos distintos.

(c) É o plano π, pois este é o plano mediador de AB.

20-6 Um ponto X pertence ao lugar geométrico se, e somente se, X eqüidista de A e B, e também de B e C. Então, se $A \neq B$ e $B \neq C$, o lugar geométrico é a interseção dos planos mediadores de AB e BC.

(a) Os mediadores são transversais, pois seus vetores normais $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são LI. Logo, o lugar geométrico é uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ e, portanto, perpendicular ao plano ABC. Ela intercepta o plano ABC no *circuncentro* do triângulo ABC (centro da circunferência que contém os vértices).

(b) Os planos mediadores são paralelos, pois $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ é LD, e distintos, já que o ponto médio de AB pertence a um deles e não ao outro.

(c) Suponha, por exemplo, que $A = C \neq B$. Os planos mediadores são iguais, pois $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ é LD, e o ponto médio de AB, que é também ponto médio de BC, pertence a ambos.

20-7 (a) O lugar geométrico é a reta r: $X = (0,-3,-1) + \lambda(1,0,1)$, e o circuncentro, $(1,-3,0)$.

(b) O lugar geométrico é o conjunto vazio (A, B e C são colineares, distintos dois a dois); não existe o triângulo.

20-8 (a) Mais próximo: $(-1,2,2)$; mais afastado: B.

(b) Mais próximo: A; mais afastado: B.

(c) Mais próximo: B; mais afastado: A.

(d) Mais próximo: $(4,2,-1)$; mais afastados: A e B.

20-9 Siga os passos do Exercício Resolvido 20-1, ao qual se reduz este quando $n = 0$.

20-10 (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{34}/7$ (c) $\sqrt{270/29}$ (d) $3\sqrt{10/7}$

20-11 $(2,0,2)$ e $(0,2,-2)$.

20-12 $(1,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ $(1,-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ $(2,0,0)$

Calcule $d = d(O,r)$ e determine os pontos de r que distam $d\sqrt{2}$ de O. Você também pode resolver este exercício usando medidas angulares (compare com o Exercício 19-9).

20-13 (a) $(1,0,0)$ e $(19/3,8/3,16/3)$.

(b) $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

20-14 Como a base de todos os triângulos é a mesma, estamos interessados em que a altura seja mínima: use a técnica do λ para obter o ponto de r mais próximo da reta AB.

(a) $(-5,4,-1)$; r e AB são retas reversas, e por isso o ponto procurado é único.

(b) Qualquer ponto X de r é solução (os triângulos ABX têm todos a mesma área, pois r e s são paralelas distintas).

(c) Não existe X, porque as retas r e AB são concorrentes em $P = (-1,-3,0)$ e, quanto mais próximo X estiver de P, menor será a área do triângulo ABX.

(d) Não existe X (as retas r e AB são coincidentes e, portanto, não existe nenhum triângulo ABX nas condições do enunciado).

20-15 São duas soluções:

$X = (-1,3,-3) + \lambda(1,0,2)$ $X = (-1,17/9,-7/9) + \lambda(1,0,2)$

Use a técnica do λ para determinar o ponto comum a r e s.

20-16 Quatro soluções:

$X = (0,0,0) + \lambda(0,1,1)$ $X = (2,0,0) + \lambda(0,1,1)$

$X = (4,0,0) + \lambda(4,1,1)$ $X = (-2,0,0) + \lambda(4,1,1)$

Obtenha inicialmente um vetor diretor de r; a partir daí, a resolução é semelhante à do Exercício Resolvido 20-4.

20-17 O lugar geométrico é a reunião das retas de equações vetoriais

$X = (0,-2+\sqrt{6},2) + \lambda(-1,0,1)$ $X = (0,-2-\sqrt{6},2) + \lambda(-1,0,1)$

20-18 O lugar geométrico é a reunião dos planos

π_1: $y = z$ π_2: $2x - y - z = 2$

20-19 O lugar geométrico é a reta h: $X = (1/2,0,11/2) + \lambda(0,1,-1)$.

20-21 (a) 2 (b) 7/2 (c) 94/13 (d) 0

20-22 $6/\sqrt{41}$

20-23 $2/\sqrt{3}$

20-24 Você deve mostrar que quatro dos pontos dados são vértices de um quadrilátero plano, convexo (base da pirâmide), e que o ponto restante não pertence ao plano do quadrilátero. Veja os Exercícios 13-12 e 13-13. Para calcular o volume, que é 4/3, identifique as diagonais da base (Exercício 13-13 (c)) e decomponha convenientemente a pirâmide em dois tetraedros.

20-25 (a) 4/3 (b) 0 (c) 1/3

Uma resolução elegante: se $\overrightarrow{PQ} /\!/ \pi$, a distância de PQ ao plano é $d(P,\pi)$; se $\overrightarrow{PQ} \not\!/\!/ \pi$ e π não separa P e Q, a distância é o menor dos números $d(P,\pi)$ e $d(Q,\pi)$; se π separa P e Q, a distância é 0.

20-26 $(-3,5,-8)$ e $(9,-7,16)$.

20-27 (a) $(2/5,7/5,9/5)$ e $(-2/3,1/3,-1/3)$.

(b) $(3,1,2)$ e $(-1,-1,-2)$.

20-28 (a) $x + z - 2 = 0$. (b) Não existe π.

(c) Existem dois planos: π: $y + z - 1 = 0$ e π: $x - y - 1 = 0$. Interpretação geométrica: a distância de P a r é $\sqrt{2}$; logo, no caso (a), $d(P,r) = d(P,\pi)$ e o Exercício Resolvido 20-9 mostra que π é perpendicular à reta que contém P e é perpendicular a r (por isso, é único). No caso (b), a existência de π iria contrariar o resultado do Exercício Resolvido 20-9.

20-29 Duas soluções: $6x + 6y - 7z + 11 = 0$ e $z + 1 = 0$.

20-30 $3x + y + 2z - 2 = 0$

20-31 Duas soluções: $z - 1 = 0$ e $x + y + 2z - 4 = 0$.

20-32 Para ver que não vale a recíproca, pense em um segmento PQ paralelo a π.

20-33 O lugar geométrico é reunião de quatro retas, de equações vetoriais

$X = (0,-1,1/2) + \lambda(1,0,0)$ $X = (3/2,-1,0) + \lambda(0,0,1)$

$X = (3/2,0,1/2) + \lambda(0,1,0)$ $X = (0,1/2,-1) + \lambda(1,-1,1)$

Elas são as interseções dos bissetores dos diedros determinados por π_1 e π_2 com os bissetores dos diedros determinados por π_2 e π_3.

20-34 É a reunião dos planos de equações gerais $4x + 3y - 2z = 0$ e $5y - 6z + 12 = 0$ (cuja interseção é a reta $\pi_1 \cap \pi_2$).

20-35 (a) $7x + 19y - 10z + 5 = 0$ e $17x - y + 10z - 5 = 0$

20-36 $x + 3y - 6z = 0$. Se θ_1 e θ_2 são as medidas angulares entre π_1 e os planos bissetores, o plano procurado corresponde ao *maior* dos números $\cos\theta_1$ e $\cos\theta_2$ (pois o co-seno é decrescente em $[0,\pi/2]$).

20-37 $3x + 3y + 1 = 0$

Se você pensou em escolher, dos dois planos bissetores β_1 e β_2, o que está mais próximo de O, cuidado: este não é, necessariamente, o plano procurado (veja a Figura R-20-37, onde os planos π_1, π_2, β_1 e β_2 são representados de perfil). Escolha um ponto qualquer de β_1 que não pertença a β_2 e responda às perguntas: π_1 separa este ponto e O? π_2 separa este ponto e O? Se as duas respostas forem *sim* (caso do ponto Q, na figura), ou se ambas forem *não* (é o caso do ponto P), então β_1 é o plano procurado. Senão, o plano procurado é β_2.

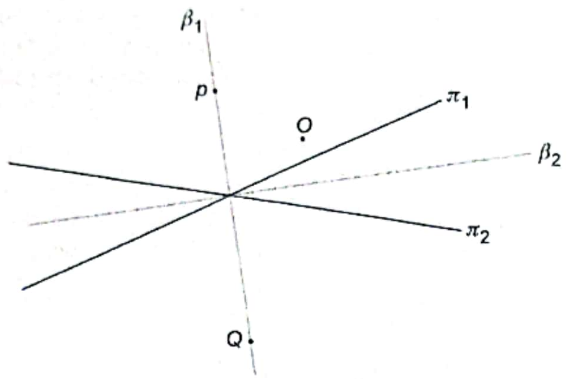

Figura R-20-37

20-38 (a) $7/\sqrt{26}$ (b) 13 (c) $4/\sqrt{46}$ (d) $\sqrt{41/21}$
(e) $5\sqrt{30}/6$

20-39 $\sqrt{10}/2$

20-40 (a) $\sqrt{486/13}$ (b) $3\sqrt{3}$

A distância pedida é $d(M,s)$, em que M é o ponto de AB mais próximo de s. Seja r a reta AB. Pelo Exercício Resolvido 20-14 (e com a mesma notação), M é o ponto de AB mais próximo de P. Logo, $M = P$ se P pertence a AB; caso contrário, $M = A$ ou $M = B$ e a distância pedida é o menor dos números $d(A,P)$ e $d(B,P)$.

20-41 (a) r: $X = (1,3,-1) + \lambda(-1,0,1)$

(b) Duas soluções: r: $X = (1,2,0) + \lambda(1,-1,0)$

r: $X = (1,2,0) + \lambda(1,3,-4)$

20-42 $X = (0,0,3) + \lambda(0,1,0)$

20-43 $X = (1,0,2) + \lambda(1,3,1)$

20-44 Duas soluções: $X = (1,0,1) + \lambda(0,1,0)$ e $X = (1,0,1) + \lambda(2,1,0)$.

20-45 Duas soluções: $X = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$ e $X = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$.

20-46 Quatro soluções:

$X = (1,1,1) + \lambda(5,5,-2)$ $X = (1,1,1) + \lambda(1,1,-2)$

$X = (1,1,1) + \lambda(5,-5,-2)$ $X = (1,1,1) + \lambda(1,-1,-2)$

20-47 Duas soluções: $X = (2,1,4) + \lambda(1,4,-1)$ e $X = (2,1,4) + \lambda(1,0,1)$.

20-48 Quatro soluções:

$X = (-2,2,1) + \lambda(1,-1,0)$ $X = (0,0,-1) + \lambda(1,-1,0)$

$X = (0,0,\sqrt{17}) + \lambda(-1,1,4)$ $X = (0,0,-\sqrt{17}) + \lambda(-1,1,4)$

Usando o fato de que r está contida em π_1 e forma ângulo de 30° com π_2, você pode obter um vetor diretor: $\vec{r} = (1,-1,0)$ ou $\vec{r} = (-1,1,4)$, ou múltiplos escalares destes, é claro. Em seguida, determine o ponto de interseção de r com π_2: para cada um dos vetores diretores obtidos há dois pontos possíveis.

20-49 (a) $Oyz - \{B\}$ (conjunto de todos os pontos do plano de equação $x = 0$, com exceção do ponto B).

(b) $\pi_1 \cup \pi_2 - t$. Ao calcular $d(r,s)$ é necessário distinguir os casos $r//s$ e $r \not\parallel s$. No primeiro, verifica-se que a reta t que contém B e é paralela a r não dista 3 de r, e portanto seus pontos não pertencem ao lugar geométrico. No segundo, chega-se à equação $x(2x + 6y - 3z + 6) = 0$, que descreve a reunião dos planos π_1: $x = 0$ e π_2: $2x + 6y - 3z + 6 = 0$. Observando que t está contida em ambos, conclui-se que o lugar geométrico é $\pi_1 \cup \pi_2 - t$.

(c) É o conjunto vazio.

20-50 A alternativa correta é (A).

Como s é paralela a Oxy, existe um plano que contém s e é paralelo a Oxy; é o plano π: $z - 1 = 0$. Se r e s são paralelas, então $d(r,s) = d(P,s) = d(P,Q) = \sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$ (alternativas (B) e (D)). Se r e s não são paralelas, $d(r,s) = d(P,\pi) = 1$ (alternativa (C)). Para responder em trinta segundos, talvez você devesse abrir mão do rigor e basear-se na Figura R-20-50.

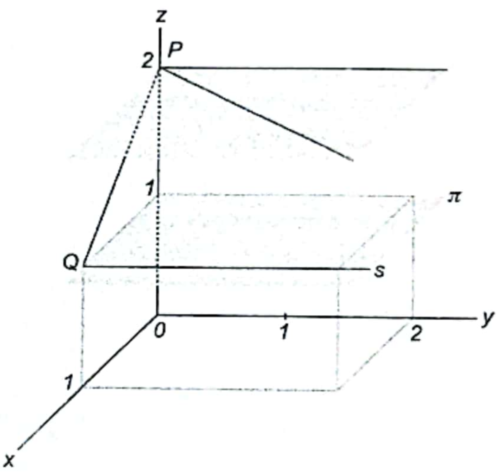

Figura R-20-50

20-51 (a) Suponha que r e s sejam reversas e tome pontos A e C em r, B e D em s (Figura R-20-51). Os vetores $\vec{r} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{s} = \overrightarrow{BD}$ são, respectivamente, vetores diretores de r e s, portanto, $d(r,s) = |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}| / \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\|$. O numerador é igual ao volume do paralelepípedo $ACEFBGHD$ e o denominador é a área do paralelogramo $ACEF$; logo, [20-10] significa que $d(r,s)$ é a altura do paralelepípedo, em relação à face $ACEF$.

(b) Com a notação da resposta (a): conforme [9-12], o comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é $|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}| / \|\vec{r} \wedge \vec{s}\|$, que é o segundo membro de [20-10].

20-52 (a) 0 (b) $3/\sqrt{2}$ (c) 0 (d) 1 (e) $1/\sqrt{5}$

20-53 $3/2\sqrt{2}$

20-54 Duas soluções: $y - 1 = 0$ e $6x - 2y - 3z - 7 = 0$.

20-55 Duas soluções: $3x + 4y - 2z - 2 = 0$ e $3x + 4y - 2z = 0$.

20-56 (a) Duas soluções: $X = (1,0,3) + \lambda(1,1,0)$

$X = (4,0,-3) + \lambda(7,4,0)$

(b) Duas soluções: $X = (2,3,1) + \lambda(1,0,1)$

$X = (-3,-3,-4) + \lambda(7,0,4)$

20-57 $X = (-1,0,5) + \lambda(0,1,-1)$

20-58 Duas soluções: $X = (0,-1/3,0) + \lambda(2,-2,1)$

$X = (-1/3,0,0) + \lambda(2,-2,1)$