$$\|\vec{u}\|h = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\theta = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

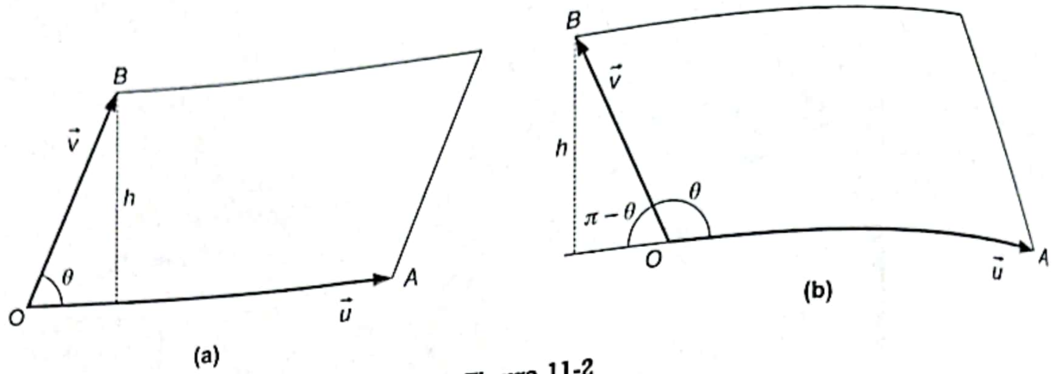

Figura 11-2

(d) Vimos no Capítulo 9 que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$. Não vá pensar, por uma falsa analogia, que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é igual a $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\theta$. *Trata-se de erro grave*, pois $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é vetor, e $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\theta$ é número. De acordo com (b_1) (Definição 11-1), esse número é igual, isto sim, à *norma* de $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Lembre-se:

> Produto escalar de dois vetores é número real.
> Produto vetorial de dois vetores é vetor.

Exercícios

11-1 A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30°, e suas normas, 2 e 3. Calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

11-2 Sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$ e $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \pi/6$ rd, calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ e $\|4\vec{u}\wedge 9\vec{v}\|$.

11-3 O triângulo *ABC* tem área 4. Sendo $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$, calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

11-4 (a) Seja *h* a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado *AB*. Prove que

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

(b) Escreva expressões análogas à do item (a) para as outras duas alturas.

(c) Sejam *A*, *B* e *C* pontos quaisquer tais que $A \neq B$. Baseando-se no item (a), obtenha uma fórmula para calcular a distância de *C* à reta *r* determinada por *A* e *B*.

11-5 Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30° e $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e $(2,2,1)_E$ são de mesmo sentido. Determine a tripla de coordenadas de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ na base E.

11-6 A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é 60°, e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

11-7 Calcule $(\sqrt{2}\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} + \vec{w})\wedge(-\sqrt{6}\vec{u} + 3\vec{v} - \sqrt{3}\vec{w})$.

11-8 O lado do hexágono regular representado na Figura 11-3 mede 2. Calcule:

(a) $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF}\|$ (b) $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ (c) $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$ (d) $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}\|$ (e) $\|\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{BE}\|$

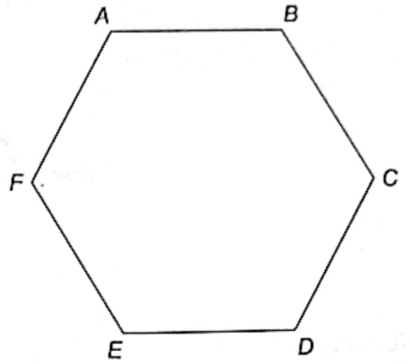

Figura 11-3

11-9 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são unitários e $\text{ang}(\vec{a},\vec{b}) = 30°$. O vetor $\vec{c}$, ortogonal a ambos, tem norma 2, e a base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é positiva. Sendo $\vec{u}$ um vetor tal que $\vec{u}\cdot\vec{a} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{b} = 1$ e $\vec{u}\cdot\vec{c} = 1$, obtenha a tripla de coordenadas de $\vec{u}$ na base $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b})$.

11-10 Demonstre e interprete geometricamente as relações:

(a) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (b) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

11-11 (a) Prove que, se $\theta = \text{ang}(\vec{u},\vec{v})$, então $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\text{sen}^2\theta$. Conclua que, na Definição 11-1, a condição (b_1), pode ser substituída por

$$(b_4)\ \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

(b) Calcule a norma de $\vec{u}\wedge\vec{v}$, sabendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{v}\| = 5$.

(c) Em relação a uma base ortonormal, $\vec{a} = (1,-2,1)$ e $\vec{b} = (-2,1,-2)$. Calcule $\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|$.

(d) O lado do triângulo eqüilátero *ABC* mede *a*. Calcule $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ em função de *a*.

(e) Seja *ABCD* um tetraedro regular de aresta unitária. Calcule $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\|$.

11-3 *Exercício Resolvido*

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores LI tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ e $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$. Dado um ponto O, sejam $P = O + \vec{p}$, $Q = O + \vec{q}$, $R = O + \vec{u}\wedge\vec{v}$ e π o plano ortogonal a $\vec{u}$ que contém O (como $\vec{q}$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}$ são ortogonais a $\vec{u}$, os pontos Q e R pertencem a π; veja a Figura 11-4). Prove que:

(a) $Q\hat{O}R$ é reto;

(b) Q e R pertencem a uma circunferência de centro O (contida em π);

(c) $F = (\vec{q},\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{u})$ é base positiva.

(Falando informalmente, este exercício mostra que, se $\vec{u}$ é unitário, calcular $\vec{u}\wedge\vec{v}$ corresponde a projetar $\vec{v}$ ortogonalmente sobre π e fazer, em seguida, uma rotação de 90° em torno de $\vec{u}$, isto é, da reta OP. O sentido de rotação é o anti-horário, do ponto de vista de um observador situado no semi-espaço de origem π para o qual aponta $\vec{u}$.)

Observe que as soluções da primeira equação podem ser escritas sob a forma $\vec{x} = \vec{j} + \vec{k} + a(\vec{i} + 2\vec{k})$, que é a soma de uma solução particular (o vetor $\vec{j} + \vec{k}$) com múltiplos escalares de $\vec{i} + 2\vec{k}$. Este último, por sua vez, é o vetor que aparece no primeiro membro da equação. Outro detalhe: os vetores $\vec{i} + 2\vec{k}$ e $\vec{j}$, que aparecem nos primeiros membros das equações, são ortogonais. Quando isso ocorre, o sistema é indeterminado, como este, ou incompatível, como aconteceria se a segunda equação fosse $\vec{x}\cdot\vec{j} = 3$ (veja o Exercício EV-11, no Apêndice EV).

(b) Seja $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Substituindo nas equações do sistema e efetuando os cálculos, obtemos $b + c = 1$, $2c - a = 1$, $a + 2b = 1$ e $a + 2b + c = 1$. Portanto, $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$. Concluímos que o conjunto-solução do sistema proposto é constituído unicamente pelo vetor $-\vec{i} + \vec{j}$.

Note que os vetores $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, que aparecem nos primeiros membros das equações, não são ortogonais. Conforme o Exercício EV-11, esse é o motivo de existir uma única solução.

Exercícios

Nos exercícios 11-22 a 11-28, B = $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ é base ortonormal positiva.

11-22 Resolva os sistemas:

(a) $\begin{cases} \vec{x}\wedge(\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{x}\cdot(\vec{i} + \vec{j}) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \vec{x}\cdot(2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x}\wedge(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \vec{x}\wedge(\vec{i} - \vec{k}) = \vec{j} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$

11-23 Determine $\vec{x}$ tal que $\vec{x}\wedge(\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$.

11-24 Resolva a equação $(\vec{i}\wedge\vec{x})\wedge\vec{i} + (\vec{x}\wedge\vec{j})\wedge\vec{j} + (\vec{x}\wedge\vec{k})\wedge\vec{k} = \vec{0}$.

11-25 Prove que, qualquer que seja o vetor $\vec{v}$, $\|\vec{v}\wedge\vec{i}\|^2 + \|\vec{v}\wedge\vec{j}\|^2 + \|\vec{v}\wedge\vec{k}\|^2 = 2\|\vec{v}\|^2$.

11-26 Determine $\vec{x}$ de norma $\sqrt{3}$, ortogonal a $(1,1,0)_B$ e a $(-1,0,1)_B$, e que forma ângulo agudo com $\vec{j}$.

11-27 (a) Dados os vetores linearmente independentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$, descreva, em termos do produto vetorial $\vec{u}\wedge\vec{v}$, o conjunto **A** dos vetores ortogonais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

(b) Determine o vetor $\vec{w}$ do conjunto **A**, unitário, tal que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja base negativa.

(c) Aplique (b) ao caso em que $\vec{u} = (1,-3,1)_B$ e $\vec{v} = (-3,3,3)_B$.

(d) Seja E = $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ a base obtida da base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ pelo Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt ($\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são os do item (c)). Dados $\vec{x} = (1,1,2)_E$ e $\vec{y} = (0,2,-1)_E$, calcule $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

11-28 Sejam $\vec{u} = (1,1,1)_B$ e $\vec{v} = (0,1,2)_B$. Obtenha uma base ortonormal positiva $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ tal que

- $\vec{a}$ e $\vec{u}$ sejam de mesmo sentido;
- $\vec{b}$ seja combinação linear de $\vec{u},\vec{v}$;
- a primeira coordenada de $\vec{b}$ seja positiva.

- Antes de usar a Proposição 11-10 (c) para pôr em evidência um fator comum, verifique se ele está do mesmo lado (à direita ou à esquerda) em todas as parcelas. Como não é esse o caso de $\vec{v}$ na expressão $\vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{w}$, o modo correto de fatorá-la é $\vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} - \vec{w}\wedge\vec{v} = (\vec{u} - \vec{w})\wedge\vec{v}$ ou, então, $\vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{w} = -\vec{v}\wedge\vec{u} + \vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{v}\wedge(-\vec{u}) + \vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{v}\wedge(-\vec{u} + \vec{w})$.
- Na igualdade $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{w}$ não se pode cancelar $\vec{u}$ e concluir que $\vec{v} = \vec{w}$, mesmo que $\vec{u}$ seja diferente de $\vec{0}$ (para obter um contra-exemplo, tome $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = 2\vec{u}$ e $\vec{w} = 3\vec{u}$). De $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{w}$ podemos concluir, isto sim, que $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v} - \vec{w}$, pois

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} - \vec{u}\wedge\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\wedge(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v} - \vec{w}) \text{ é LD.}$$

- A operação não é associativa, como mostra o seguinte contra-exemplo, em que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ é uma base ortonormal positiva: $(\vec{j}\wedge\vec{j})\wedge\vec{i} \neq \vec{j}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{i})$, pois $(\vec{j}\wedge\vec{j})\wedge\vec{i} = \vec{0}\wedge\vec{i} = \vec{0}$ e $\vec{j}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{i}) = \vec{j}\wedge(-\vec{k}) = -\vec{i}$.

11-12 *Exercício Resolvido*

Mostre que o produto vetorial de dois vetores gerados por $\vec{u}$, $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Interprete geometricamente.

Resolução

Sejam $\vec{r} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e $\vec{s} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$. Usando a Proposição 11-10, obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\wedge\vec{s} &= (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})\wedge(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) \\
&= (\alpha\vec{u})\wedge(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) + (\beta\vec{v})\wedge(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) \\
&= (\alpha\vec{u})\wedge(\gamma\vec{u}) + (\alpha\vec{u})\wedge(\delta\vec{v}) + (\beta\vec{v})\wedge(\gamma\vec{u}) + (\beta\vec{v})\wedge(\delta\vec{v}) \\
&= \vec{0} + (\alpha\delta)\vec{u}\wedge\vec{v} + (\beta\gamma)\vec{v}\wedge\vec{u} + \vec{0} \\
&= (\alpha\delta)\vec{u}\wedge\vec{v} - (\beta\gamma)\vec{u}\wedge\vec{v} \\
&= (\alpha\delta - \beta\gamma)\vec{u}\wedge\vec{v}
\end{aligned}$$

Interpretação geométrica: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos a um plano π, então $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é ortogonal a π. Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos a π, $\vec{r}\wedge\vec{s}$ é ortogonal a π. Portanto, $\vec{r}\wedge\vec{s}$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}$ são paralelos.

Exercícios

11-32 Prove que $(\vec{u} + \vec{v})\wedge(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v}\wedge\vec{u}$.

11-33 São dados os pontos O, A, B e C.

(a) Prove que o vetor $\vec{x}_{ABC} = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$ não depende do ponto O, isto é, qualquer que seja o ponto P, $\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB}\wedge\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC}\wedge\overrightarrow{PA} = \vec{x}_{ABC}$ (isto justifica a notação $\vec{x}_{ABC}$).

(b) Exprima o vetor $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ em função de $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

(c) Prove que A, B e C são colineares se, e somente se, $\vec{x}_{ABC} = \vec{0}$.

(d) Suponha que A, B e C não são colineares. Obtenha um vetor ortogonal ao plano determinado por esses pontos, em função de $\vec{x}_{ABC}$.

11-34 Prove que:

(a) $(\vec{v} - \vec{u})\wedge(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{w} + \vec{w}\wedge\vec{u}$

(b) $(\vec{u}-\vec{t})\wedge(\vec{v}-\vec{w})+(\vec{v}-\vec{t})\wedge(\vec{w}-\vec{u})+(\vec{w}-\vec{t})\wedge(\vec{u}-\vec{v})=2(\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{u})$

11-35 Prove que, se $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}\wedge\vec{t}$ e $\vec{u}\wedge\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{t}$, então $\vec{u}-\vec{t}$ e $\vec{v}-\vec{w}$ são linearmente dependentes.

11-36 Prove que, se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI e $\vec{w}\wedge\vec{u}=\vec{w}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, então $\vec{w}=\vec{0}$. Interprete geometricamente.

11-37 Prove que, se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, então $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$. Interprete geometricamente.

11-38 Dado $\vec{u}\neq\vec{0}$, considere o conjunto **A** dos vetores ortogonais a $\vec{u}$. Prove que, quaisquer que sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de **A**, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{w}\Rightarrow\vec{v}=\vec{w}$ (esta é uma situação muito especial, em que se pode cancelar $\vec{u}$).

11-39 Supondo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, prove que $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}\wedge\vec{w}=\vec{w}\wedge\vec{u}$. Conclua que um dos pares ordenados $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{u},\vec{w})$ e $(\vec{v},\vec{w})$ é LI se, e somente se, o mesmo sucede com os outros dois.

11-40 O lado do quadrado *ABCD* mede 2, *AC* é diagonal e *M* é ponto médio de *BC*. Calcule $\|\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DB}\|$.

11-41 *ABC* é um triângulo, e *P* e *Q* são pontos tais que $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos *BPQ* e *ABC*.

11-42 ➭ Explique por que a distância entre as retas que contêm as arestas opostas *AB* e *CD* de um tetraedro é igual a $\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD})|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\|}$.

11-43 ➭ Demonstre a Lei dos senos, segundo a qual, em qualquer triângulo, são iguais as razões entre os senos dos ângulos internos e as medidas dos respectivos lados opostos.

11-44 ➭ Sejam $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal positiva e $*$ uma operação interna em $\mathbb{V}^3$ que satisfaz as propriedades

$$\vec{u}*(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}*\vec{v}+\vec{u}*\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})*\vec{w}=\vec{u}*\vec{w}+\vec{v}*\vec{w}$$
$$(\lambda\vec{u})*\vec{v}=\lambda(\vec{u}*\vec{v})=\vec{u}*(\lambda\vec{v})$$

Supondo que

$$\begin{array}{lll} \vec{i}*\vec{i}=\vec{0} & \vec{i}*\vec{j}=\vec{k} & \vec{i}*\vec{k}=-\vec{j} \\ \vec{j}*\vec{i}=-\vec{k} & \vec{j}*\vec{j}=\vec{0} & \vec{j}*\vec{k}=\vec{i} \\ \vec{k}*\vec{i}=\vec{j} & \vec{k}*\vec{j}=-\vec{i} & \vec{k}*\vec{k}=\vec{0} \end{array}$$

prove que $*=\wedge$, isto é, $\vec{u}*\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

O que vamos fazer em seguida visa à obtenção de expressões para os **duplos produtos vetoriais** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ e $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$. Já vimos que, pela falta da propriedade associativa, esses dois produtos podem ser diferentes. Vamos começar considerando o primeiro deles, supondo que $(\vec{u},\vec{v})$ seja LI. Na parte (a) do Exercício Resolvido 11-8 mostramos que, neste caso, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$. Logo, existem escalares λ e μ tais que

11-18 *Exercício Resolvido*

Prove a **Identidade de Jacobi**: $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} + (\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

Resolução

Usando a proposição anterior, obtemos:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = -(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$$
$$(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} = -(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}$$
$$(\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = -(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w} + (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}$$

Para obter a Identidade de Jacobi, basta somar membro a membro as três igualdades e usar a propriedade comutativa do produto escalar.

Exercícios

11-46 Sejam B uma base ortonormal positiva, $\vec{u} = (1,-3/2,1/2)_B$, $\vec{v} = (6,-2,-4)_B$ e $\vec{w} = (1/7,2/7,3/7)_B$. Calcule $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ e $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ diretamente e, depois, utilizando [11-12].

11-47 Prove que:

(a) $(\vec{v}\perp\vec{w}$ e $\vec{v}\perp\vec{u}) \Rightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

(b) $(\vec{u},\vec{w})$ é LD $\Rightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$

(c) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) \Rightarrow [(\vec{u},\vec{w})$ é LD ou $(\vec{v}\perp\vec{u}$ e $\vec{v}\perp\vec{w})]$

(Resumindo: $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ se, e somente se: $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são LD, ou são ambos ortogonais a $\vec{v}$.)

11-48 Prove que:

(a) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{t}) = -[\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{t})]\vec{u} + [\vec{u}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{t})]\vec{v}$

(b) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{t}) = [(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{t}]\vec{w} - [(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}]\vec{t}$

11-49 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores ortogonais e $\vec{w} = \vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$. Prove que $\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{w}) = \|\vec{u}\|^4\vec{v}$.

11-50 Prove que:

(a) $\vec{u}\wedge[\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{t})] = (\vec{v}\cdot\vec{t})\vec{u}\wedge\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}\wedge\vec{t}$

(b) $\vec{u}\wedge[\vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{t})] = [\vec{u}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{t})]\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}\wedge\vec{t}$

11-51 (a) Prove que, se $\vec{u}$ é unitário, então $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u} = \vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, qualquer que seja $\vec{v}$. O duplo produto $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$ é, portanto, o vetor $\vec{q}$ mencionado em [9-9].

◆ (b) Sejam B_1 a base ortonormalizada de E pelo Processo de Gram-Schmidt e $B_2 = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, a base ortonormalizada de E pelo processo alternativo descrito na Observação 11-9. Prove que $B_1 = B_2$ (se E é positiva) ou $B_1 = (\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ (se E é negativa).

(c) Prove que, se $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$ não é nulo, então este vetor forma ângulo agudo com $\vec{v}$.

11-52 ◆ No triângulo ABC, AH é a altura relativa ao vértice A. Prove que $\overrightarrow{BC}\wedge(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ é paralelo a AH.

11-53 Sejam $\wedge$ e $\curlywedge$ os produtos vetoriais associados às duas orientações distintas de $\mathbb{V}^3$. Exprima:

(a) $\vec{a}\curlywedge\vec{b}$ em função de $\vec{a}\wedge\vec{b}$;

(b) $(\vec{a}\curlywedge\vec{b})\curlywedge\vec{c}$ em função de $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$;

(c) $(\vec{a}\curlywedge\vec{b})\curlywedge(\vec{c}\curlywedge\vec{d})$ em função de $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})$.

Segundo modo (usando a definição de produto misto) A medida angular em radianos entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/2$, e entre $\vec{w}$ e $\vec{u}\wedge\vec{v}$, como acabamos de ver, é π. Então,

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos\pi = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\|\vec{w}\|\cos\pi = 1\cdot2\cdot1\cdot3\cdot(-1) = -6$$

EXERCÍCIOS

12-1 A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30°, e o vetor $\vec{w}$, de norma 4, é ortogonal a ambos. Sabendo que a base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é positiva, calcule $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

12-2 Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI e $\vec{w}$ um vetor não-nulo. Sendo $\mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \varphi$ e $\mathrm{ang}(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w}) = \theta$, exprima $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ em função de φ, θ e das normas dos vetores.

12-3 (a) Prove que $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

◆ (b) Prove que vale a igualdade no item (a) se, e somente se, algum dos vetores é nulo ou eles são dois a dois ortogonais.

(c) Dê uma interpretação geométrica para os itens (a) e (b), em termos de volumes.

12-4 A base *ABCD* do paralelepípedo na Figura 12-3 tem área 9. O ponto *M* divide (*A*,*B*) na razão 2, e a aresta *BF*, de comprimento 2, forma com o plano da base um ângulo de 60°. Calcule $[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BF}]$, sabendo que $\mathbb{V}^3$ está orientado por uma base dextra.

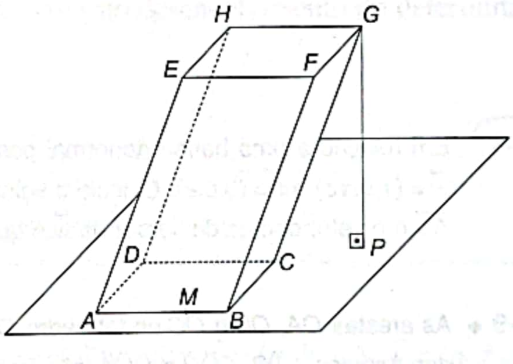

Figura 12-3

12-5 No paralelepípedo *ABCDEFGH* representado na Figura 12-3, a área da base *ABCD* é $6\sqrt{3}$ e a aresta *GC* tem comprimento 4. O ângulo $C\hat{G}P$ mede 30° (*GP* é perpendicular ao plano *ABC*) e o ponto *M* é tal que $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$. Calcule $[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{GC}]$, sabendo que $\mathbb{V}^3$ está orientado por uma base sinistra.

12-6 O produto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ é α. Mudando-se a orientação de $\mathbb{V}^3$, ele passa a ser β. Qual a relação entre α e β?

12-7 Sejam *A*, *B* e *C* pontos não-colineares. Exprima a distância de um ponto *D* ao plano *ABC* em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

12-3 *Exercício Resolvido* Mostre que o volume de um tetraedro $ABCD$ é igual a $\|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\|/6$.

Resolução

O volume V do tetraedro é dado por $V = Sh/3$, em que S é a área de uma base e h, a altura correspondente. Tomemos o triângulo ABC como base (acompanhe na Figura 12-4). Nesse caso, $S = \|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|/2$ e, pelo Exercício 12-7, $h = \dfrac{\|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$. Assim,

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|\,\frac{\|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|} = \frac{1}{6}\,\|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\|$$

A conclusão é que o volume de um tetraedro $ABCD$ é igual à sexta parte do volume do paralelepípedo que tem os segmentos AB, AC e AD como arestas. Veja o Apêndice VT.

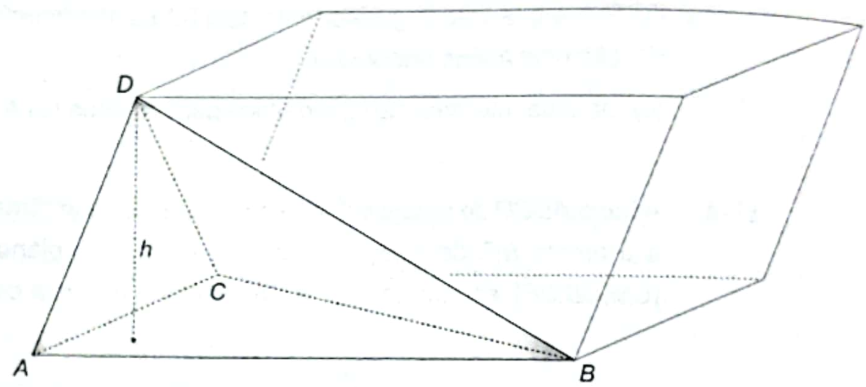

Figura 12-4

EXERCÍCIOS

12-8 Em relação a uma base ortonormal positiva, são dados os vetores $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (0,3,-4)$, $\vec{w} = (1,0,\sqrt{3})$ e $\vec{t} = (0,0,2)$. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$, sabendo que $\vec{AB} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$, que $\vec{AC}$ é o vetor oposto do versor de $\vec{w}$ e que $\vec{BD} = \text{proj}_{\vec{t}}(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$.

12-9 ◆ As arestas OA, OB e OC do tetraedro $OABC$ medem, respectivamente, a, b e c, e as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}A$, são (respectivamente) α, β e γ. Calcule o volume do tetraedro em função de a, b, c, α, β, γ.

A proposição seguinte mostra como obter $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ a partir das coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

12-4 *Proposição* Em relação a uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, sejam $\vec{u} = (a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v} = (a_2,b_2,c_2)$ e $\vec{w} = (a_3,b_3,c_3)$. Então,

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- Suponhamos que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ e $(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ sejam LI, isto é, bases. Neste caso, Δ é o determinante da matriz de mudança de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ para $(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$. Pela Proposição 12-8 (b), $\Delta = \dfrac{[\vec{p},\vec{q},\vec{r}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}$ e desta igualdade decorre [12-4].

◀

12-17 Observação Eis uma resolução mais rápida para o Exercício Resolvido 12-15: tomando $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$, $a_3 = 1$, $b_3 = 0$ e $c_3 = 1$ em [12-4], obtemos

$$[\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$

Exercícios

12-20 Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}, -\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}-3\vec{w}]$.

12-21 Sejam *ABCD* um tetraedro, $P = A + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $Q = B - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ e $R = C + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calcule a razão entre os volumes dos tetraedros *PQRD* e *ABCD*.

12-22 Sejam $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ uma base positiva, $\vec{u} = \vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{v} = (\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}$ e $\vec{w} = (\vec{b}\wedge\vec{a})\wedge\vec{a}$.

(a) Mostre que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base e determine sua orientação.

(b) Calcule o volume de um paralelepípedo cujas arestas são paralelas a $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e têm comprimentos $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$, sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{c}$ são unitários, a norma de $\vec{b}$ é 2 e a base $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é ortogonal.

12-23 Resolva a equação $(\vec{x}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{x}\wedge\vec{b}) = \vec{c}$, sabendo que $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \neq 0$.

(c) Para ($\Rightarrow$), use o argumento: se $\alpha\vec{a} = \beta\vec{b}$, e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são nulos, então $\alpha = \beta = 0$ ou $\vec{a}//\vec{b}$.

9-61 (a) Basta notar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI. (b) 2 e 3.

9-62 (b) $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^3}{||\vec{u}||^4||\vec{v}||^2}\vec{u}$

(c) $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^n}{||\vec{u}||^n||\vec{v}||^n}\vec{v}$ para n par, e $\dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^n}{||\vec{u}||^{n+1}||\vec{v}||^{n-1}}\vec{u}$ para n ímpar (a demonstração se faz por indução finita). Note que, se θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a resposta pode ser escrita sob a forma

$(\cos^n\theta)\vec{v}$ para n par;

$(\cos^{n-1}\theta)\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u} = (\cos^{n-1}\theta)\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, para n ímpar.

(d) 135/16 (use o resultado do item (c), com $n = 6$).

9-64 M_{EB} é uma *matriz triangular superior*, isto é, todos os seus elementos situados abaixo da diagonal principal são nulos.

9-65 $\vec{i} = (1/3,2/3,2/3)$, $\vec{j} = (2/3,-2/3,1/3)$, $\vec{k} = (2/3,1/3,-2/3)$.

9-66 (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

9-67 De $M^tM = I$ decorre $(\det M^t)(\det M) = 1$, isto é, $(\det M)^2 = 1$. As matrizes dos itens (a) e (b) do Exercício 9-66 mostram que não vale a recíproca.

9-68 (b) $\vec{u} = (0,-1,1)_E$, $\vec{v} = (0,1,1)_E$, $\vec{w} = (-1,0,0)_E$, $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = \sqrt{2}$.

(d) $M_{EF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ $M_{FE} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(são transpostas uma da outra, devido ao Exercício Resolvido 9-17).

(e) $\overrightarrow{HB} = (-1,1,1)_E = (0,\sqrt{2},1)_F$

9-69 $\vec{a} = (2/\sqrt{3},-3/\sqrt{2},7/\sqrt{6})$

Lembrou-se de usar o Exercício Resolvido 9-17?

9-70 (1) Simplifica o cálculo das coordenadas de um vetor (Exercício 9-26).

(2) Permite o cálculo da norma de um vetor pela fórmula [7-4].

(3) Permite o cálculo do produto escalar usando-se a Proposição 9-4.

(4) Facilita a inversão da matriz M_{EF} para obter M_{FE} (Exercício Resolvido 9-17). *E outras vantagens ainda virão...*

Capítulo 10

10-1 Use as propriedades de determinantes, como na demonstração da Proposição 10-2.

10-2 (a) Concordantes. (b) Concordantes.

(c) Discordantes.

10-4 (a) Discordantes. (b) Concordantes.

(c) Discordantes. (d) Concordantes.

10-5 (a) $t \neq -1$ e $t \neq -1/3$

(b) Concordantes: $t > -1/3$. Discordantes: $-1 \neq t < -1/3$.

(c) Sim: $F(0) = E$, pois $M(0) = I_3$.

(d) $t_0 = 1$ $\quad \vec{a} = 3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ $\quad \vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{w}$ $\quad \vec{c} = -3\vec{v} + 5\vec{w}$

10-6 Escreva as matrizes de mudança de base e calcule seus determinantes.

10-7 Não, pois as bases do enfeite escolhido, seja ele qual for, são azuis. Seria o mesmo que dizer, na terminologia "oficial": "$\mathbb{V}^3$ está orientado por uma base negativa".

10-8 (a) F pertence a **A**. (b) F pertence a **B**.

10-9 Dextras: E e F; sinistras: G e H.

10-10 (a) Concordantes. (b) Discordantes.

10-11 Na maioria dos aspiradores, a rosca é invertida. Se você não conseguiu retirar o bocal, tente girar em sentido contrário. Isso mostra que, para que a Regra do saca-rolhas funcione bem, é preciso que a rosca imaginada seja uma rosca convencional.

Capítulo 11

11-1 3

11-2 7/2 e 126.

11-3 8

11-4 (a) Use a Observação 11-2 (c).

(b) $||\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}||/||\overrightarrow{CB}||$ $\quad ||\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}||/||\overrightarrow{CA}||$

(estas não são as únicas respostas possíveis).

(c) $d(C,r) = ||\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}||/||\overrightarrow{AB}||$.

11-5 (1/3,1/3,1/6)

11-6 $2\sqrt{3}$

11-7 $\vec{0}$, pois o segundo é o produto de $-\sqrt{3}$ pelo primeiro.

11-8 (a) $2\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $4\sqrt{3}$ (d) $4\sqrt{3}$ (e) $8\sqrt{3}$

11-9 $\vec{u} = (2(4-\sqrt{3}),4(1-\sqrt{3}),1)$. Escreva $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ e calcule seu produto escalar por $\vec{a}$, por $\vec{b}$ e por $\vec{c}$ para obter os valores de α, β e γ. Em seguida, mostre que $\vec{c} = 4\vec{a}\wedge\vec{b}$.

11-10 Sejam a e b números reais positivos fixados. Interpretação geométrica de (a): dados um paralelogramo e um retângulo cujos lados medem a e b, a área do primeiro não pode ser maior que a do segundo. Interpretação geométrica de (b): dentre os paralelogramos cujos lados medem a e b, somente os retângulos têm a maior área possível, que é ab.

11-11 (b) 4 (c) $3\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}a^2/2$ (e) 1

Utilize a igualdade (b_4) do item (a) para resolver (b), (c) e (d).

11-13 (a) Use [11-4]; lembre-se de que $\vec{u}_{ij} = (a_1,b_1,0)$, $\vec{v}_{ij} = (a_2,b_2,0)$ etc.

(b) $S(\Omega)^2 = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = D_{bc}^2 + D_{ac}^2 + D_{ab}^2$. Use a parte (a).

(c) De $\cos\gamma = \dfrac{(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{k}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\,\|\vec{k}\|} = \dfrac{(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{k}}{S(\Omega)}$ decorre

$$S(\Omega)|\cos\gamma| = |(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{k}| = |(D_{bc},-D_{ac},D_{ab})\cdot\vec{k}| = |D_{ab}|$$

Portanto, pela parte (a), $S(\Omega)|\cos\gamma| = S(\Omega_{ij})$ etc.

11-14 $-12\vec{i} + 4\vec{j} - 16\vec{k}$

11-15 (a) Verdadeira. Por ser uma permutação não-cíclica de G, a base $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ é ortonormal positiva; logo,

$\vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}$ $\quad \vec{c}\wedge\vec{b} = \vec{a}$ $\quad \vec{b}\wedge\vec{a} = \vec{c}$ $\quad \vec{c}\wedge\vec{a} = -\vec{b}$ $\quad$ etc.

(b) Falsa. Não sabemos que vetores são $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. O correto é escrever, na primeira linha do determinante, os vetores da base à qual se referem as coordenadas que estão nas outras duas linhas.

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2,11,-4)_E = -2\vec{p} + 11\vec{q} - 4\vec{r}$$

11-16 $F = (\vec{p},\vec{r},\vec{q})$ é uma base ortonormal positiva (pois é uma permutação não-cíclica de E), e, em relação a ela, $\vec{u} = (a_1,c_1,b_1)$ e $\vec{v} = (a_2,c_2,b_2)$. Então, pela Proposição 11-4,

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{r} & \vec{q} \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

11-17 (a) $(-10,-2,-14)$ e $(10,2,14)$. (b) $(10,2,14)$ e $(-10,-2,-14)$.
(c) $(-13,-3,4)$ e $(13,3,-4)$. (d) $(0,0,0)$ e $(0,0,0)$.

11-18 $\sqrt{62}$, quer AB e AD sejam lados, quer um dos dois seja diagonal.

11-19 $\sqrt{19}/2$

11-20 (d) $2\overrightarrow{EA}$, aplicada em qualquer ponto do segmento que une os centros dos quadrados *ABCD* e *EFGH*.

11-21 (a) É o conjunto vazio, pois não está obedecida a condição necessária dada na parte (b) do exercício resolvido anterior.

(b) É o conjunto de todos os vetores paralelos a $2\vec{i} + 3\vec{k}$.

11-22 (a) $\vec{x} = (1,1,1)_B$ (b) $\vec{x} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(c) $\vec{x} = (a,0,1-a)_B$ e $\vec{y} = (1-a,1,a-1)_B$ ($a\in\mathbb{R}$).

11-23 $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

11-24 O conjunto-solução é formado por todos os vetores gerados por $\vec{j}$, $\vec{k}$.

11-26 $\vec{x} = (-1,1,-1)$. Você pode resolver este exercício utilizando ou não o produto vetorial (o Exercício 9-13, por exemplo, é semelhante a este); recomendamos que o faça dos dois modos e compare as resoluções.

11-27 (a) **A** é o conjunto dos múltiplos escalares de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

(b) $\vec{w} = -\dfrac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$ (c) $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$

(d) $\vec{x}\wedge\vec{y} = (5,-1,-2)_E$. Cuidado; devido ao Exercício Resolvido 10-4, E é base ortonormal negativa. Veja o Exercício 11-16.

11-28 $\vec{a} = (1,1,1)/\sqrt{3}$, $\vec{b} = (1,0,-1)/\sqrt{2}$, $\vec{c} = (-1,2,-1)/\sqrt{6}$.

11-29 Usando a notação da Observação 11-9:

$\vec{i} = (1,0,1)/\sqrt{2}$ $\qquad \vec{j} = (0,1,0)$ $\qquad \vec{k} = (-1,0,1)/\sqrt{2}$

Pelo método de Gram-Schmidt, obtém-se a base $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ e, pelo outro método, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Note que a base E é negativa.

11-30 *DF* é perpendicular ao plano *PMN* se, e somente se, $\overrightarrow{PM}\wedge\overrightarrow{PN} = \lambda\overrightarrow{DF}$. Escolha uma base ortonormal positiva $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ conveniente e calcule as coordenadas de $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ e $\overrightarrow{DF}$ nessa base. Sugestão para a escolha da base: tome $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ respectivamente paralelos a $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$. Outro modo de resolver (que não usa o produto vetorial) é escrever $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ e $\overrightarrow{DF}$ como combinações lineares de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ e impor a condição $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$.

11-31 Na base E: $\vec{a} = (-1,0,1)/\sqrt{2}$, $\vec{b} = (-1,0,-1)/\sqrt{2}$, $\vec{c} = (0,-1,0)$.

11-33 (a) Partindo do primeiro membro, faça aparecer *O* em todos os termos. Use, em seguida, a Proposição 11-10.

(b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{v}\wedge\vec{w} + \vec{w}\wedge\vec{u} = \vec{x}_{ABC}$.

(c) Decorre de (b) e da Observação 11-2 (a).

(d) Há infinitas respostas: são os múltiplos escalares de $\vec{x}_{ABC}$.

11-35 Calcule $(\vec{u} - \vec{t})\wedge(\vec{v} - \vec{w})$ e use a Observação 11-2 (a).

11-36 Interpretação geométrica: uma reta não pode ser simultaneamente paralela a duas retas concorrentes.

11-37 Interpretação geométrica: duas retas não podem ser simultaneamente paralelas e ortogonais.

11-38 $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{w} \Rightarrow \vec{u}\wedge(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$. Como $\vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = 0$, recaímos na situação descrita no Exercício 11-37.

11-39 A resolução mais rápida é puramente algébrica: calcule o produto vetorial de ambos os membros de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ por $\vec{u}$ e, depois, por $\vec{v}$.

11-40 2

11-41 4/9. A razão é $\|\overrightarrow{BQ}\wedge\overrightarrow{BP}\|/\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\|$. Exprima $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{BP}$ em função de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$.

11-42 Sejam *r* e *s*, respectivamente, as retas (reversas) que contêm as arestas *AB* e *CD* e seja *h* a reta perpendicular comum a *r* e *s* (veja a Figura R-11-42). Sejam ainda *P* e *Q*, respectivamente, os pontos de interseção de *h* com *r* e *s*. Então, a

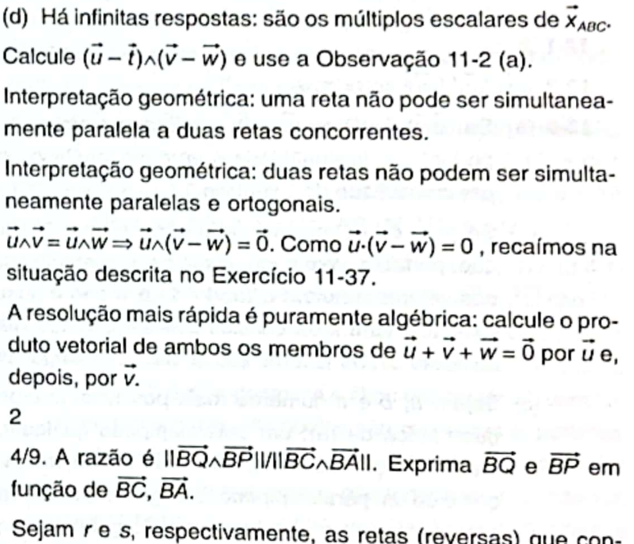

Figura R-11-42

distância entre r e s é igual a $\|\vec{PQ}\|$, e $\vec{PQ}$ é a projeção ortogonal de $\vec{AC}$ sobre o vetor $\vec{u} = \vec{AB}\wedge\vec{CD}$. Aplique [9-12].

11-43 Dado o triângulo ABC, sejam $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{BC}$, $\vec{w} = \vec{CA}$. Pelo Exercício 11-39, $\|\vec{AB}\wedge\vec{BC}\| = \|\vec{BC}\wedge\vec{CA}\| = \|\vec{CA}\wedge\vec{AB}\|$. Conclui-se, portanto, que $\|\vec{AB}\|\text{sen}\hat{B} = \|\vec{CA}\|\text{sen}\hat{C}$ etc.

11-45 Escreva $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = -(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}$ para aplicar [11-11].

11-46 $(1,-2,1)$ e $(-10/7,-13/7,-19/7)$.

11-51 (b) Sendo $B_1 = (\vec{r},\vec{s},\vec{t})$, $\vec{r}$ e $\vec{i}$ são versores do mesmo vetor $\vec{u}$; logo, $\vec{r} = \vec{i}$. Mostre que $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ e $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$ são de mesmo sentido e conclua que seus versores ($\vec{j}$ e $\vec{s}$) são iguais. Assim, $\vec{k} = \vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{r}\wedge\vec{s}$. Para terminar, lembre-se de que $\vec{r}\wedge\vec{s} = \vec{t}$ se B_1 é positiva e $\vec{r}\wedge\vec{s} = -\vec{t}$ se B_1 é negativa.

(c) Utilize [11-11] e a relação (b_4) do Exercício 11-11 para mostrar que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2$; como $\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ (conseqüência da hipótese), decorre que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$.

11-52 Basta mostrar que $\vec{AH}\wedge[\vec{BC}\wedge(\vec{AB}\wedge\vec{AC})] = \vec{0}$; para isso, use a parte (b) do Exercício 11-50.

11-53 (a) $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{a}\wedge\vec{b}$ (b) $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} = (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$

(c) $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = -(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})$

Capítulo 12

12-1 2

12-2 $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,\text{sen}\varphi\cos\theta$

12-3 (a) Se $(\vec{u},\vec{v})$ é LD ou $\vec{w} = \vec{0}$, o primeiro membro é nulo e, portanto, a desigualdade é verdadeira. Caso contrário, use o resultado do Exercício 12-2.

(b) Se $(\vec{u},\vec{v})$ é LD, mostre que o primeiro membro é nulo e que, portanto, vale a igualdade se, e somente se, algum dos vetores é nulo. Se $(\vec{u},\vec{v})$ é LI e $\vec{w}$ não é nulo, use o Exercício 12-2 para concluir que a igualdade vale se, e somente se, os vetores são dois a dois ortogonais.

(c) Sejam a, b e c números reais positivos. Interpretação geométrica de (a): um paralelepípedo qualquer, cujas arestas meçam a, b e c, não pode ter volume maior do que o de um paralelepípedo retângulo cujas arestas também meçam a, b e c. Interpretação geométrica de (b): dentre os paralelepípedos cujas arestas medem a, b e c, somente os paralelepípedos retângulos têm o maior volume possível, que é abc.

12-4 $[\vec{CM},\vec{CB},\vec{BF}] = \|\vec{CM}\wedge\vec{CB}\|\,\|\vec{BF}\|\cos 30° = \ldots = 3\sqrt{3}$

12-5 24

12-6 $\beta = -\alpha$

12-7 $|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]|/\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$ (o volume do paralelepípedo, dividido pela área de uma base, é igual à altura correspondente).

12-8 3/50

12-9 $(abc/6)\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$

Pelo Exercício 12-2, se $\theta = \text{ang}(\vec{OA}\wedge\vec{OB},\vec{OC})$, o volume é

$$\frac{1}{6}|\vec{OA}\wedge\vec{OB}\cdot\vec{OC}| = \frac{1}{6}abc\cdot\text{sen}\alpha|\cos\theta|$$

Para eliminar θ desta expressão, parta de

$$\|(\vec{OA}\wedge\vec{OB})\wedge\vec{OC}\|^2 = \|\vec{OA}\wedge\vec{OB}\|^2\|\vec{OC}\|^2\text{sen}^2\theta$$
$$= \|\vec{OA}\|^2\|\vec{OB}\|^2\text{sen}^2\alpha\|\vec{OC}\|^2\text{sen}^2\theta$$

e aplique a fórmula [11-11] (duplo produto vetorial) ao primeiro membro, obtendo a relação

$$\text{sen}^2\alpha\ \text{sen}^2\theta = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

12-10 r e s são coplanares se, e somente se, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{PQ}$ são paralelos a um mesmo plano, ou seja, se, e somente se, $(\vec{u},\vec{v},\vec{PQ})$ é LD. Use o Corolário 12-5.

12-11 A base $F = (\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ é ortonormal positiva, e $\vec{u} = (-1,1,-3)_F$, $\vec{v} = (1,1,0)_F$, $\vec{w} = (2,1,1)_F$. Aplique a Proposição 12-4 para obter $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 1$.

12-12 Use a estratégia sugerida na resposta do Exercício 12-11.

12-13 (a) -4 (b) $\arccos(-4/9\sqrt{2})$

12-14 (a) $-2\sqrt{2}$ (use o resultado do Exercício 12-2).

(b) $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$. Mostre que $\vec{DC}\wedge\vec{DA} = \lambda\vec{VO}$, $\lambda > 0$. Tomando normas, obtenha $\lambda = 2\sqrt{2}$. Exprima $\vec{VO}$ na base dada.

12-15 (a) Veja o Exercício Resolvido 9-17, em que foi calculado um produto matricial parecido com este.

(b) Em relação à base E, sejam A a matriz que tem $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e B a matriz que tem $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ por vetores-coluna (nessa ordem). Pela parte (a), o determinante do enunciado é igual a $\det(A^tB)$, que por sua vez é igual a $(\det A^t)(\det B) = (\det A^t)(\det B^t) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\cdot[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]$. Para justificar esta última igualdade, use argumento semelhante ao da demonstração da Proposição 12-8 (a).

(c) $2\sqrt{-2+\sqrt{6}}$. Faça, na igualdade do item (b), $\vec{u} = \vec{x}$, $\vec{v} = \vec{y}$, $\vec{w} = \vec{z}$.

12-16 (a) Escreva $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ e calcule cada produto misto envolvendo $\vec{x}$.

(b) $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

12-17 3

12-18 (b) Substitua, em (a), $\vec{w}$ por $\vec{w}\wedge\vec{t}$ e $\vec{t}$ por $\vec{x}$.

(c) Substitua, em (a), $\vec{w}$ por $\vec{a}\wedge\vec{b}$ e $\vec{t}$ por $\vec{x}\wedge\vec{y}$.

Como treinamento, resolva (b) e (c) sem utilizar (a).

12-19 (a) No Exercício 12-18 (c), faça $a = \vec{v}$, $b = \vec{x} = \vec{w}$, e $y = \vec{u}$.

(b) e (c) decorrem de (a) e do Corolário 12-5.

(d) Use o Corolário 12-9.

(e) O determinante é $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. Use o Corolário 12-9 e a Proposição 12-8 (b).

12-20 24

12-21 2

12-22 (a) A base é negativa (utilize o Corolário 12-9).

(b) 8

12-23 Como $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \neq 0$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é base. Escreva $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ e substitua no primeiro membro da equação. Se $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \leq 0$, não há solução. Se $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$, a solução é $\vec{x} = \pm[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^{-1/2}\vec{c}$.