• simétrica $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-0}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$

(b) *Primeiro modo* Substituindo x por -9, y por 10 e z por -9 nas equações de r na forma simétrica e fazendo os cálculos, obtemos $5 = 5 = 5$, o que mostra que as coordenadas de P constituem uma solução do sistema. Logo, P pertence a r.

Segundo modo Substituindo x, y e z pelas coordenadas de P nas equações paramétricas de r, obtemos

$$\begin{cases} -9 = 1 - 2\lambda \\ 10 = 2\lambda \\ -9 = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

que é um sistema compatível (sua solução é $\lambda = 5$). Isso quer dizer que P é um ponto da reta r.

(c) Qualquer múltiplo escalar não-nulo de $\overrightarrow{BA}$ é um vetor diretor de r. Por exemplo, $2\overrightarrow{BA} = (-4,4,-4)$, $\overrightarrow{AB} = (2,-2,2)$, ou o próprio $\overrightarrow{BA} = (-2,2,-2)$. Para obter os pontos, atribuímos valores arbitrários a λ nas equações paramétricas: escolhendo $\lambda = 1$, obtemos $(-1,2,-1)$, e escolhendo $\lambda = 2$, obtemos $(-3,4,-3)$. (Isso equivale a escolher valores iguais para as frações da forma simétrica: escolhendo o valor 1, obtemos $(x-1)/(-2) = y/2 = (z-1)/(-2) = 1$, isto é, $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$ etc.)

Qual a finalidade de estudar tantas formas de equações de reta? Acontece que cada uma tem suas características próprias que, bem exploradas, simplificam certas tarefas. A forma vetorial, [14-1], é *intrínseca*, isto é, não depende de sistema de coordenadas. Por isso, é útil em situações teóricas ou quando não se fixou um sistema. A forma paramétrica, [14-2], e sua forma vetorial equivalente, $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(a,b,c)$, permitem a caracterização dos pontos da reta com o auxílio de uma única variável λ, o que, na prática, leva à redução do número de incógnitas (em vez de três, x, y e z, trabalhamos com uma, λ). A forma simétrica, que não apresenta parâmetro, exibe relações que as coordenadas dos pontos da reta devem manter *entre elas mesmas*. Um aspecto comum às três formas é a sua funcionalidade visual: basta olhar as equações para conhecer um ponto da reta e um vetor não-nulo paralelo a ela.

É claro que, para escrever equações na forma paramétrica, ou na forma simétrica, ou equações vetoriais em coordenadas, é necessário ter adotado previamente um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$. No restante deste capítulo e nos capítulos posteriores, esse sistema ficará, muitas vezes, subentendido (como já ocorreu no Exercício Resolvido 14-6).

EXERCÍCIOS

14-1 Estudando Geometria Analítica em uma noite de sábado, Amanda resolveu vários exercícios que pediam equações de reta. Relacionamos a seguir as respostas dela e as do livro. Quais exercícios Amanda acertou?

Exercício A	$X = (1,2,1) + \lambda(-1,2,1)$	$X = (1,2,1) + \lambda(-1/2,1,1/2)$
Exercício B	$X = (1/3,-1/3,2/3) + \lambda(-1,1,-1)$	$X = (1,-1,2) + \lambda(-1,1,-1)$
Exercício C	$X = (1,1,0) + \lambda(1,0,-1/2)$	$X = (0,1,1/2) + \lambda(-2,0,1)$

14-2 (a) Sejam $B = (-5,2,3)$ e $C = (4,-7,-6)$. Escreva equações nas formas vetorial, paramétrica e simétrica para a reta BC. Verifique se $D = (3,1,4)$ pertence a essa reta.

(b) Dados $A = (1,2,3)$ e $\vec{u} = (3,2,1)$, escreva equações da reta que contém A e é paralela a $\vec{u}$, nas formas vetorial, paramétrica e simétrica. Supondo que o sistema de coordenadas seja ortogonal, obtenha dois vetores diretores unitários dessa reta.

14-3 Escreva equações paramétricas dos eixos coordenados. Essas equações podem ser colocadas na forma simétrica?

14-4 Obtenha dois pontos e dois vetores diretores da reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Verifique se os pontos $P = (1,3,-3)$ e $Q = (-3,4,12)$ pertencem à reta.

14-5 Obtenha equações paramétricas da reta que contém o ponto $(1,4,-7)$ e é paralela à reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 200 - \lambda \\ y = \sqrt{3} - 3\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

14-6 Sejam $B = (1,1,0)$ e $C = (-1,0,1)$. Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto $(3,3,3)$ e é paralela à reta BC.

14-7 *Exercício Resolvido*

Mostre que as equações

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1$$

descrevem uma reta, escrevendo-as de modo que possam ser reconhecidas como equações na forma simétrica. Exiba um ponto e um vetor diretor da reta.

Resolução

O sistema de equações dado é equivalente a

$$\frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

e essas são equações na forma simétrica da reta que contém o ponto $(1/2,1,-1)$ e tem $(3/2,-2,1)$ como vetor diretor.

Exercícios

14-7 Escreva equações nas formas paramétrica e simétrica da reta que contém o ponto $A = (2,0,-3)$ e é paralela à reta descrita pelas equações $(1 - x)/5 = 3y/4 = (z + 3)/6$.

14-8 Escreva equações na forma simétrica da reta determinada pelo ponto $(-1,-4,-2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1,3,5)$ e $(3,-3,1)$.

14-9 Usando somente números inteiros, escreva uma equação vetorial da reta que contém o ponto médio do segmento de extremidades $(1,1,3)$ e $(3,1,-1)$ e tem vetor diretor $(\sqrt{3}/49, 3\sqrt{3}/98, -\sqrt{3}/7)$.

14-10 Sejam $A = (3,6,-7)$, $B = (-5,2,3)$ e $C = (4,-7,-6)$.

(a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.

(b) Escreva equações paramétricas da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

14-11 Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, $A = (0,0,1)$, $B = (1,2,1)$ e $C = (1,0,1)$. Obtenha equações paramétricas das retas que contêm a bissetriz interna e as externas do triângulo ABC, relativas ao vértice C.

14-12 Sejam, em relação a um sistema ortogonal, $A = (1,4,0)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,2,2)$. Verifique que esses pontos são vértices de um triângulo e escreva uma equação vetorial da reta que contém a altura relativa ao vértice B.

14-8 *Exercício Resolvido*

São dados os pontos $A = (0,1,8)$ e $B = (-3,0,9)$, e a reta r: $X = (1,2,0) + \lambda(1,1,-3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo.

Resolução

A e B são distintos e não pertencem a r; portanto, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são nulos. Logo, se dois deles forem ortogonais, A, B e C serão vértices de um triângulo retângulo. Como C pertence a r, deve satisfazer sua equação:

$$C = (1,2,0) + \lambda(1,1,-3) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, -3\lambda)$$

para algum valor de λ. O enunciado não especifica qual dos segmentos AB, BC e AC é a hipotenusa do triângulo. Analisemos, então, as três possibilidades.

- Se a hipotenusa é AB, então $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, isto é,

$$(1 + \lambda, 1 + \lambda, -3\lambda - 8)\cdot(4 + \lambda, 2 + \lambda, -3\lambda - 9) = 0$$

Calculando e simplificando, obtemos $11\lambda^2 + 59\lambda + 78 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -26/11$. Esses valores, substituídos nas coordenadas de C, fornecem duas soluções do problema: $C_1 = (-2,-1,9)$ e $C_2 = (-15/11,-4/11,78/11)$ (Figura 14-3). ◀

- Se a hipotenusa é BC, então $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, isto é, $(-3,-1,1)\cdot(1 + \lambda, 1 + \lambda, -3\lambda - 8) = 0$. Concluímos que $\lambda = -12/7$ e que, portanto, uma terceira solução do problema é $C_3 = (-5/7, 2/7, 36/7)$. ◀

- Se a hipotenusa é AC, de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ obtemos $\lambda = -23/7$ e uma quarta solução: $C_4 = (-16/7, -9/7, 69/7)$.

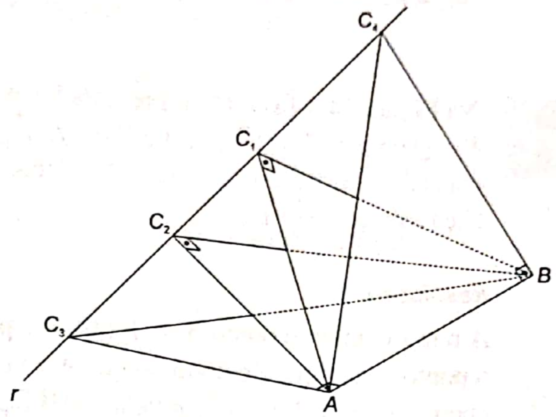


Figura 14-3

O método utilizado na resolução anterior merece um comentário especial. Escrever as coordenadas do ponto C na forma paramétrica, $C = (1 + \lambda, 2 + \lambda, -3\lambda)$, em vez de $C = (x,y,z)$, produziu, logo de início, uma drástica redução do número de incógnitas, de três para um. Isso teve como conseqüência a redução do número de equações necessárias à resolução do problema, simplificando-a bastante. Recomendamos vivamente que você não perca nenhuma oportunidade de usar esse recurso que as formas paramétrica e vetorial das equações de reta proporcionam. Quando nos referirmos a essa técnica, vamos chamá-la de "técnica do λ".

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 14-13 a 14-18, o sistema de coordenadas é ortogonal.

14-13 Sejam $A = (1,2,3)$ e $B = (-2,3,0)$. Escreva equações da reta AB nas formas vetorial, paramétrica e simétrica e obtenha os pontos da reta que distam $2\sqrt{19}$ de A.

14-14 Sejam $A = (1,2,5)$ e $B = (0,1,0)$. Determine o ponto P da reta AB tal que $\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\|$. Este exercício é uma homenagem a Santos Dumont.

14-15 Sejam $A = (0,2,1)$ e r: $X = (0,2,-2) + \lambda(1,-1,2)$. Obtenha os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida, verifique se a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$ e justifique sua resposta.

14-16 Sejam $A = (1,1,1)$ e r: $X = (1,1,4) + \lambda(1,-1,0)$. Obtenha os pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A. Em seguida, verifique se a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{11}$ e justifique sua resposta.

14-17 Sejam $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$ e r: $X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$. Determine os pontos de r eqüidistantes de A e B.

(d) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$ são LD, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, $\vec{w}$ é paralelo a π.

14-15 *Exercício Resolvido*

(a) Escreva uma equação vetorial do plano que tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 6 + \lambda + \mu \\ y = 1 + 7\lambda + 4\mu \\ z = 4 + 5\lambda + 2\mu \end{cases} \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

(b) Obtenha três pontos não-colineares desse plano.

Resolução

(a) Observando as equações

$$\begin{cases} x = \boxed{6} + \lambda \boxed{1} + \mu \boxed{1} \\ y = \boxed{1} + \lambda \boxed{7} + \mu \boxed{4} \\ z = \boxed{4} + \lambda \boxed{5} + \mu \boxed{2} \end{cases}$$

vemos que o plano contém o ponto $A = (6,1,4)$ e é paralelo aos vetores linearmente independentes $\vec{u} = (1,7,5)$ e $\vec{v} = (1,4,2)$, de modo que uma equação vetorial é

$$X = (6,1,4) + \lambda(1,7,5) + \mu(1,4,2)$$

(b) Os pontos $A = (6,1,4)$, $A + \vec{u} = (7,8,9)$ e $A + \vec{v} = (7,5,6)$ pertencem ao plano (correspondem aos pares de valores (0,0), (1,0) e (0,1) dos parâmetros) e não são colineares, pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.

EXERCÍCIOS

14-20 Em uma tarde chuvosa, Cecília resolveu vários exercícios de Geometria Analítica que pediam equações de planos e foi ao final do livro conferir as respostas. Relacionamos a seguir, para cada exercício, as duas respostas: a de Cecília e a do livro. Quais exercícios ela acertou?

Exercício 1	$X = (1,2,1) + \lambda(1,-1,2) + \mu(-1/2,2/3,-1)$	$X = (1,2,1) + \lambda(-1,1,-2) + \mu(-3,4,-6)$
Exercício 2	$X = (1,1,1) + \lambda(2,3,-1) + \mu(-1,1,1)$	$X = (1,6,2) + \lambda(-1,1,1) + \mu(2,3,-1)$
Exercício 3	$X = (0,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,0)$	$X = (1,1,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(0,-1,1)$
Exercício 4	$X = (2,1,3) + \lambda(1,1,-1) + \mu(1,0,1)$	$X = (0,1,1) + \lambda(1,3,-5) + \mu(1,-1,3)$

14-21 Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π, utilizando as informações dadas em cada caso.

(a) π contém $A = (1,2,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1,1,0)$ e $\vec{v} = (2,3,-1)$.

(b) π contém $A = (1,1,0)$ e $B = (1,-1,-1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2,1,0)$.

(c) π contém $A = (1,0,1)$ e $B = (0,1,-1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $C = (1,2,1)$ e $D = (0,1,0)$.

(d) π contém os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$.

(e) π contém os pontos $A = (1,0,2)$, $B = (-1,1,3)$ e $C = (3,-1,1)$.

14-22 Obtenha equações paramétricas do plano que contém o ponto $A = (1,1,2)$ e é paralelo ao plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda \end{cases}$$

14-23 Obtenha equações paramétricas dos planos coordenados.

14-24 Supondo que o sistema de coordenadas seja ortogonal, obtenha equações paramétricas dos seis planos bissetores dos diedros determinados pelos planos coordenados.

14-25 Decomponha $\vec{u} = (1,2,4)$ como soma de um vetor paralelo à reta r: $X = (1,9,18) + \lambda(2,1,0)$ com outro paralelo ao plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

14-26 São dados os sistemas de equações

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R}) \\ z = -\lambda - 2\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}$$

(a) Descreva o lugar geométrico dos pontos $X = (x,y,z)$ que satisfazem o primeiro sistema.

(b) Enuncie uma condição necessária e suficiente para que o segundo seja sistema de equações paramétricas de um plano.

14-16 *Exercício Resolvido*

Na Figura 14-7 (a) estão representados os sistemas Σ, de origem P e base $E = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, e Ψ, de origem Q e base $F = (\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$. Suponha que $X = (0,0,1) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$ seja equação vetorial de um plano π_1 em relação a Σ, e também de um plano π_2 em relação a Ψ. Faça esboços desses planos.

$$\lambda \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

isto é, $\lambda(ax + by + cz + d) = 0$. Uma vez que pelo menos um dos coeficientes a, b, c é diferente de zero, podemos afirmar que, quando λ percorre um conjunto infinito de números reais, obtêm-se infinitas equações gerais de π.

Exercícios

14-28 Em uma ensolarada manhã de domingo, Marcelo resolveu dois exercícios que pediam equações gerais de planos. Em cada um dos itens seguintes, a primeira equação é a resposta que Marcelo obteve, e a segunda, a resposta do livro. Quais exercícios ele acertou?

(a) $x - 3y + 2z + 1 = 0$; $2x - 6y + 4z + 4 = 0$. (b) $x - y/2 + 2z - 1 = 0$; $-2x + y - 4z + 2 = 0$.

14-29 Obtenha uma equação geral do plano π em cada caso.

(a) π contém $A = (1,1,0)$ e $B = (1,-1,-1)$ e é paralelo a $\vec{u} = (2,1,0)$.

(b) π contém $A = (1,0,1)$ e $B = (0,1,-1)$ e é paralelo a CD, sendo $C = (1,2,1)$ e $D = (0,1,0)$.

(c) π contém $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$.

(d) π contém $A = (1,0,2)$, $B = (-1,1,3)$ e $C = (3,-1,1)$.

(e) π contém $P = (1,0,-1)$ e r: $(x-1)/2 = y/3 = 2 - z$.

(f) π contém $P = (1,-1,1)$ e r: $X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$.

14-30 Obtenha equações gerais dos planos coordenados.

14-31 Supondo que o sistema de coordenadas seja ortogonal, obtenha equações gerais dos seis planos bissetores dos diedros determinados pelos planos coordenados.

14-32 (a) Mostre que, se $pqr \neq 0$, então os pontos $(p,0,0)$, $(0,q,0)$ e $(0,0,r)$ não são colineares e o plano determinado por eles pode ser descrito pela equação $x/p + y/q + z/r = 1$ (sob esta forma, a equação é chamada **equação segmentária** do plano). Usando os sistemas de coordenadas indicados na Figura 14-7 (a), faça esboços no caso em que $p = 1$, $q = 2$ e $r = 3/2$.

(b) Um plano pode ter mais do que uma equação segmentária?

Você deve ter notado que, ao contrário do que fizemos para todas as outras formas de equações de reta e plano apresentadas neste capítulo, não demos até agora nenhuma interpretação geométrica para os coeficientes da equação geral. Gostaríamos de fazê-lo imediatamente, mas este propósito será atingido plenamente apenas no Capítulo 17. Qual é a dificuldade de fazê-lo já? Rememore como foi obtida a equação [14-8]: usamos as coordenadas de um ponto e de dois vetores diretores do plano para fazer vários cálculos (veja [14-7]) e obter os coeficientes a, b, c e d. Assim, embora haja uma relação estreita entre esses coeficientes e as características geométricas do plano (posição, direção), ela foi escondida pelos cálculos. Apesar disso, alguns indícios de que os coeficientes têm algo a nos contar sobre a geometria do plano já podem ser percebidos. A

EXERCÍCIO **14-36** Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral do plano:

(a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \lambda - 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$

14-27 *Exercício Resolvido*

Obtenha equações paramétricas do plano π: $x + 2y - z - 1 = 0$.

Resolução

Primeiro modo Na equação dada, escolhemos uma das três incógnitas para ser isolada no primeiro membro; por exemplo, $x = -2y + z + 1$. Essa igualdade mostra que para cada par de valores reais de y e z, escolhidos arbitrariamente, obtemos um valor de x e, conseqüentemente, um ponto (x,y,z) de π. Em outras palavras: y e z estão "querendo" atuar como parâmetros! Façamos, então, a vontade deles, escrevendo $y = \lambda$ e $z = \mu$. Substituindo na expressão de x, obtemos as equações

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

Como os coeficientes de λ e μ não são proporcionais, essas são equações paramétricas de um plano, que não pode ser outro senão π, já que os pontos de π as satisfazem. ◀

Note que os coeficientes obtidos para λ e μ deste modo *nunca* são proporcionais. De fato, sempre haverá blocos de zeros e uns semelhantes aos que estão destacados nas equações [14-11]. O método é, portanto, absolutamente geral.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(-2) + \mu\, 1 \\ y = 0 + \lambda\, \boxed{1} + \mu\, \boxed{0} \\ z = 0 + \lambda\, \boxed{0} + \mu\, \boxed{1} \end{cases} \qquad \textbf{[14-11]}$$

Segundo modo Escolhemos arbitrariamente uma solução da equação dada para obter um ponto do plano; por exemplo, $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$, que fornece o ponto $A = (1,0,0)$. Para obter vetores diretores de π, lembremos que, pela Proposição 14-21, um vetor (m,n,p) é paralelo a π se, e somente se, $m + 2n - p = 0$. Isolamos uma das variáveis,

$$p = m + 2n$$

e atribuímos valores às outras duas; para garantir a independência linear, uma boa escolha é

$$m = 1, n = 0 \ \rightarrow \ p = 1$$

$$m = 0, n = 1 \ \rightarrow \ p = 2$$

Logo, $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (0,1,2)$ são vetores diretores de π. Então:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + 2\mu \end{cases} \qquad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

são equações paramétricas de π.

14-28 *Observação*

Situações como a do exercício resolvido anterior, em que devem ser escolhidas soluções arbitrárias de uma equação, são freqüentes. Se você sentir qualquer embaraço algébrico na escolha, o motivo provável é o esquecimento de um fato da Álgebra Elementar que, de tão elementar, pode passar despercebido: se uma equação, supostamente a três incógnitas, não apresenta alguma delas, isso significa que o *coeficiente* dessa incógnita é nulo e que, por isso mesmo, podemos atribuir a ela qualquer valor, sem prejuízo da igualdade (a tendência de muitos é pensar, erroneamente, que o valor das incógnitas ausentes tem que ser zero). Um jeito seguro de não errar é explicitar os coeficientes nulos. Por exemplo, se as incógnitas são m, n, p, a equação $3m - p = 0$ pode ser escrita $3m + 0n - p = 0$ (note que o valor atribuído a n é inócuo, não interfere na igualdade). Isolando p, obtemos $p = 3m + 0n$ e podemos dar a m e n os valores 1, 0 e 0, 1, como no exercício resolvido anterior. Esta observação vale, tal e qual, para a equação $-3n = 0$, que pode ser escrita $0m - 3n + 0p = 0$.

EXERCÍCIOS

14-37 Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano.

(a) $4x + 2y - z + 5 = 0$ (b) $5x - y - 1 = 0$

(c) $z - 3 = 0$ (d) $y - z - 2 = 0$

14-38 O plano π_1 contém $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$, o plano π_2 contém $Q = (-1,-1,0)$ e é paralelo a $\vec{u} = (0,1,-1)$ e $\vec{v} = (1,0,1)$, e o plano π_3 tem equação $X = (1,1,1) + \lambda(-2,1,0) + \mu(1,0,1)$.

(a) Obtenha equações gerais dos três planos.

(b) Mostre que a interseção dos três planos se reduz a um único ponto e determine-o.

14-39 Mostre que o ponto $P = (4,1,-1)$ não pertence à reta r: $X = (2,4,1) + \lambda(1,-1,2)$ e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

14-40 Obtenha os pontos de r: $X = (1,1,1) + \lambda(2,0,1)$ que pertencem ao plano π, nos casos:

(a) π: $x - y - z = 0$

(b) π: $x + 3y - 2z + 1 = 0$

(c) π: $2x - y - 4z + 3 = 0$

(d) π é o plano Oxz.

14-41 Obtenha os pontos de π_1: $X = (1,0,0) + \lambda(2,1,1) + \mu(0,0,1)$ que pertencem a π_2: $x + y + z - 1 = 0$.

14-29 *Observação*

Quando você estudou Geometria Analítica Plana, deve ter aprendido que as retas de um plano são descritas por equações de primeiro grau como $ax + by + c = 0$, que lá recebe o nome de *equação geral da reta*, ou *forma geral de equação da reta*. Não vá confundir com o que estudamos neste capítulo. Aqui, *não há nenhuma forma de equação de reta com esse nome*, e equações do tipo $ax + by + c = 0$ descrevem *planos*, não *retas* (sempre estará subentendido que há uma terceira variável, z, que não aparece na equação porque seu coeficiente é nulo). Uma equação como $x + y - 2 = 0$, por exemplo, descreve um plano paralelo a Oz, cuja interseção com Oxy, isto sim, é uma reta. Na Geometria Analítica Plana, uma equação dessa reta seria $x + y - 2 = 0$. Veja, representados na Figura 14-10, o sistema de coordenadas, a reta e o plano (r e π).

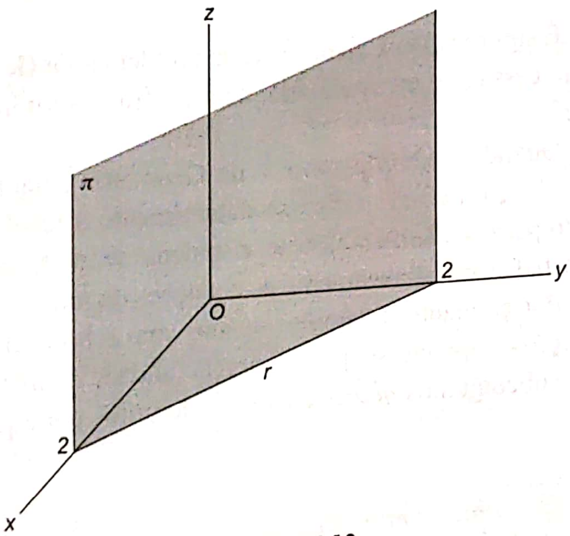


Figura 14-10

Capítulo 13

13-1 Pela aparição de coordenadas nulas. Pontos de Ox têm ordenada e cota nulas: $(x,0,0)$; pontos de Oy têm abscissa e cota nulas: $(0,y,0)$; pontos de Oz têm abscissa e ordenada nulas: $(0,0,z)$; pontos do plano Oxy têm cota nula: $(x,y,0)$; do plano Oyz, abscissa nula: $(0,y,z)$; do plano Oxz, ordenada nula: $(x,0,z)$.

13-2 Em relação ao plano Oxy: $(x,y,-z)$. Em relação ao plano Oxz: $(x,-y,z)$. Em relação ao plano Oyz: $(-x,y,z)$. Faça uma figura para se convencer de que isto é falso quando o sistema não é ortogonal.

13-3 Em relação a Ox: $(x,-y,-z)$. Em relação a Oy: $(-x,y,-z)$. Em relação a Oz: $(-x,-y,z)$. Isto é falso quando o sistema não é ortogonal.

13-4 $(-x,-y,-z)$. Vale mesmo que o sistema não seja ortogonal.

13-5 (a) $P_1 = (x,y,0)$ $\quad P_2 = (x,0,z)$ $\quad P_3 = (0,y,z)$
$P_4 = (x,0,0)$ $\quad P_5 = (0,y,0)$ $\quad P_6 = (0,0,z)$

(b) $(-x,y,z)$ $\quad (x,-y,z)$ $\quad (x,y,-z)$ $\quad (x,-y,-z)$
$(-x,y,-z)$ $\quad (-x,-y,z)$ $\quad (-x,-y,-z)$

13-6 (a) Oxy, Oz. (b) Oxz, Oy. (c) Oyz, Ox.

Observe que, neste exercício, as projeções podem ser oblíquas. Faça uma figura.

13-7 (a) $A = (0,0,0)$ $\quad B = (1,0,0)$ $\quad C = (0,1,0)$ $\quad D = (-1,1,0)$
$E = (-1,0,1)$ $\quad F = (0,0,1)$ $\quad G = (-1,1,1)$ $\quad H = (-2,1,1)$

(b) $A = (2,-1,-1)$ $\quad B = (3,-1,-1)$ $\quad C = (2,0,-1)$ $\quad D = (1,0,-1)$
$E = (1,-1,0)$ $\quad F = (2,-1,0)$ $\quad G = (1,0,0)$ $\quad H = (0,0,0)$

Observe que essas respostas são obtidas das de (a) somando-se o vetor $(2,-1,-1)$; explique por quê.

(c) $A = (1,2,-1/2)$ $\quad B = (1,4,-1/2)$ $\quad C = (1,2,0)$ $\quad D = (1,0,0)$
$E = (0,0,-1/2)$ $\quad F = (0,2,-1/2)$ $\quad G = (0,0,0)$ $\quad H = (0,-2,0)$

(d) $A = (0,0,0)$ $\quad B = (0,0,1)$ $\quad C = (1,0,0)$ $\quad D = (1,0,-1)$
$E = (0,1,-1)$ $\quad F = (0,1,0)$ $\quad G = (1,1,-1)$ $\quad H = (1,1,-2)$

13-8 $(-4,6,1)$

13-9 (a) $C = (5/3,11/3,2)$ $\quad D = (4/3,7/3,1)$

(b) $x = (x_1 + rx_2)/(1 + r)$ $\quad y = (y_1 + ry_2)/(1 + r)$
$z = (z_1 + rz_2)/(1 + r)$

13-10 $Q = (2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)$

13-12 $a \neq -1$; reverso.

Os pontos são vértices de um quadrilátero se, e somente se, são três a três não-colineares, ou seja: A, B e C não são colineares, A, B e D não são colineares, A, C e D não são colineares, e B, C e D não são colineares. Isso quer dizer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ é LI, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ é LI, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ é LI e $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ é LI, o que acontece se, e somente se, $a \neq -1$. Neste caso, o determinante das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (nessa ordem), que é igual a $-5(a + 1)$, é diferente de 0. Logo, os três vetores são LI, e, portanto, os pontos A, B, C e D não são coplanares: o quadrilátero é reverso.

13-13 (b) Como somente no item (c) você saberá quais são os lados do quadrilátero, utilize o Exercício 5-5.

(c) Os lados são AB, BD, DC e CA; as diagonais, AD e BC. Exprimindo (por exemplo) $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, você encontra coeficientes de mesmo sinal: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Pelo critério do Exercício Resolvido 6-16, a reta AD separa B e C, e, portanto, o segmento AD é uma diagonal. A outra é BC, e os quatro segmentos restantes são os lados. Como se vê, descobrir de início uma combinação linear cujos coeficientes tenham mesmo sinal simplifica a resolução. Se eles tivessem sinais contrários, você poderia "corrigir" isso passando vetores de um membro para o outro. Assim, por exemplo, da igualdade $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ decorre $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}/2$, o que mostra que $\overrightarrow{BC}$ é diagonal.

13-14 Mostre que dois dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ são LI e que um dos três é a soma dos outros dois.

13-15 Verifique que $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AC}$ e que $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})$ é LI. Disso decorre que se trata de um quadrilátero plano, com dois lados opostos paralelos de comprimentos diferentes (pois $\|\overrightarrow{DB}\| = 2\|\overrightarrow{AC}\|$), ou seja, um trapézio. A base maior é DB e a base menor é AC. Como os segmentos orientados (D,B) e (A,C) são de mesmo sentido (pois isso acontece com $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{AC}$), os segmentos DA e BC são disjuntos (Definição 1-2 (c)), não podendo, portanto, ser diagonais. Logo, os lados não-paralelos são DA e BC. Por exclusão, as diagonais são AB e CD. Você também pode resolver este exercício pelo método indicado na resposta do Exercício 13-13 (c).

13-16 $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CD}$. Os coeficientes da combinação linear são de mesmo sinal; logo, pelo Exercício Resolvido 6-16, a reta CB separa A e D. Concluímos que CB é uma diagonal e AD é a outra. Os lados são, portanto, AB, AC, BD e CD.

13-17 (a) Falsa. Contra-exemplo: os pontos $A = (1,2,2)$, $B = (3,4,1)$ e $C = (1,0,-3)$ não são colineares (pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI), mas o determinante correspondente é nulo. Outro argumento, fatal: se a afirmação fosse verdadeira, tomando $C = (0,0,0)$ e dois pontos A e B quaisquer de $\mathbb{E}^3$, concluiríamos que esses três pontos são colineares e, portanto, $\mathbb{E}^3$ seria uma reta. Assim, o determinante formado pelas coordenadas de três pontos *não tem* nenhum significado geométrico e *não serve* para verificar a colinearidade dos três pontos. Para fazer isso, o correto (e muito mais simples) é analisar a dependência linear de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(b) Verdadeira. Se A, B e C são colineares, então os pontos O, A, B e C são coplanares e, por isso, os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD. Logo, pela Proposição 7-6, $\Delta = 0$. Desta vez, estamos enxergando, nas linhas de Δ, coordenadas de *vetores*.

Capítulo 14

14-1 Amanda errou apenas o Exercício B.

14-2 (a) Forma vetorial: $(x,y,z) = (4,-7,-6) + \lambda(1,-1,-1)$.

Forma simétrica: $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+7}{1} = \dfrac{z+6}{1}$.

Forma paramétrica: r: $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -7 + \lambda \\ z = -6 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

D não pertence à reta.

(b) Forma vetorial: $(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(3,2,1)$.

Forma simétrica: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

Forma paramétrica: r: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Vetores diretores unitários: $\pm(3,2,1)/\sqrt{14}$.

14-3 Ox: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

As equações não podem ser colocadas na forma simétrica, pois os vetores diretores têm alguma coordenada nula.

14-4 Vetores diretores: $(-1,1,2)$ e $(2,-2,-4)$. P não, Q sim.

14-5 $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = -7 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Se duas retas são paralelas, qualquer vetor diretor de uma delas é vetor diretor da outra.

14-6 $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

14-7

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 + 18\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Forma simétrica: $\dfrac{x-2}{-15} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{18}$

14-8 $(x+1)/3 = (y+4)/4 = (z+2)/5$

14-9 $X = (2,1,1) + \lambda(2,3,-14)$

14-10 (a) Verifique que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI, ou, então, que C não pertence à reta AB.

(b) $\begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -7 - 11\lambda \\ z = -6 - 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Lembrou-se de que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ é paralelo à mediana?

14-11 Interna: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ Externa: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$

Use o Exercício 9-42 para obter vetores diretores.

14-12 $X = (2,1,-1) + \lambda(1,-2,-2)$. Um vetor diretor da reta procurada é $\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC})$ (Exercício 11-52). Se a base é positiva, os produtos vetoriais podem ser calculados pelo determinante simbólico (Proposição 11-4); se é negativa, pelo Exercício 11-16. Nos dois casos, você obterá o mesmo resultado (veja a Observação 11-14 (b)). Uma alternativa é usar a fórmula do duplo produto vetorial (Proposição 11-13 (b)).

14-13 Forma vetorial: $X = (1,2,3) + \lambda(-3,1,-3)$

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Forma simétrica: $(x-1)/(-3) = y - 2 = (z-3)/(-3)$

Os pontos são $(7,0,9)$ e $(-5,4,-3)$. Usou a técnica do λ?

14-14 $(3/4,7/4,15/4)$ ou $(3/2,5/2,15/2)$. Usou a técnica do λ? A homenagem a Santos Dumont está no número do exercício: 14-bis.

14-15 $(1,1,0)$. Usou a técnica do λ? A distância de A a r é igual a $\sqrt{3}$, porque apenas um ponto de r dista $\sqrt{3}$ de A.

14-16 $(2,0,4)$ e $(0,2,4)$; a distância de A a r é menor do que $\sqrt{11}$, porque existem dois pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A.

14-17 $(1,0,0)$. Usou a técnica do λ?

14-18 (a) $(2,1,-1)$ e $(22/9,13/9,-11/9)$.

(b) Não existe C.

(c) Qualquer ponto da reta PQ é solução.

(d) Não existe C.

14-19 Veja a Figura R-14-19 (M e N correspondem a $\lambda = -1/2$ na equação do item (b)).

14-20 Cecília errou apenas o Exercício 3.

14-21 (a) Forma vetorial: $X = (1,2,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(2,3,-1)$

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + \lambda + 3\mu \\ z = -\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$

(b) Forma vetorial: $X = (1,1,0) + \lambda(0,2,1) + \mu(2,1,0)$

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$

(c) Forma vetorial: $X = (1,0,1) + \lambda(1,-1,2) + \mu(1,1,1)$

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$

(d) Forma vetorial: $X = (1,-1,0) + \lambda(-1,-2,1) + \mu(0,1,1)$

Forma paramétrica: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$

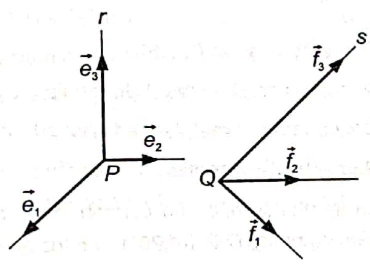
(Foram usados o ponto C e os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.)

(e) Como $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ é LD, os pontos dados são colineares e existem infinitos planos que os contêm, ou seja, π não está determinado.

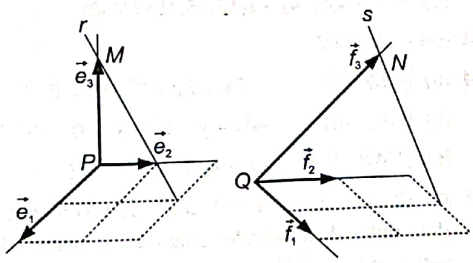
14-22 $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$

Se dois planos são paralelos, vetores diretores de um deles são vetores diretores do outro.

14-23 Oxy: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ Oxz: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Oyz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$



(a)



(b)

Figura R-14-19

14-24 $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \mu \end{cases}$ $\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

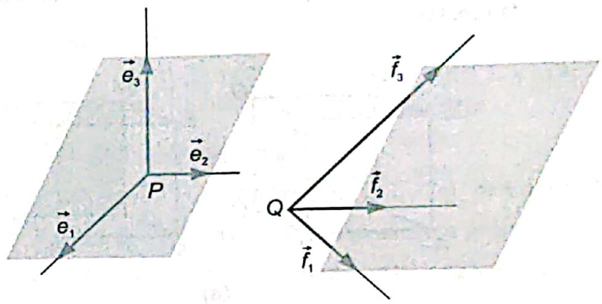
$\begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda \end{cases}$

14-25 $\vec{u} = (11,7,4) + (-10,-5,0)$

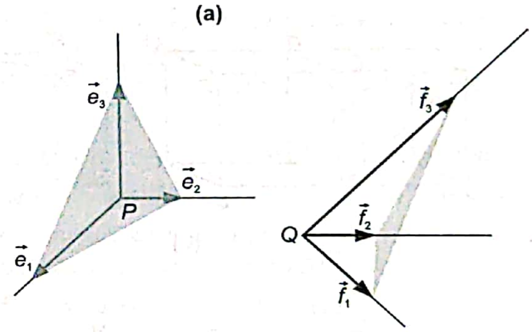
14-26 (a) É a reta que contém o ponto (0,1,0) e tem vetor diretor (1,1,–1) (introduza a notação $\alpha = \lambda + 2\mu$).

(b) Os vetores (a,b,c) e (m,n,p) serem LI.

14-27 Veja a Figura R-14-27.



(a)



(b)

Figura R-14-27

14-28 (a) Errou; a segunda equação equivale a $x - 3y + 2z + 2 = 0$, e esta é incompatível com a de Marcelo.

(b) Acertou.

14-29 (a) $x - 2y + 4z + 1 = 0$ (b) $3x - y - 2z - 1 = 0$

(c) $3x - y + z - 4 = 0$

(d) O plano não está determinado; veja a resposta 14-21 (e).

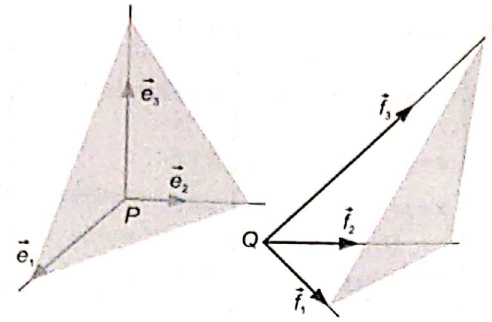
(e) $3x - 2y - 3 = 0$ (f) $x + z - 2 = 0$

14-30 Oxy: $z = 0$ Oxz: $y = 0$ Oyz: $x = 0$

14-31 $x - y = 0$ $x + y = 0$ $x - z = 0$

$x + z = 0$ $y - z = 0$ $y + z = 0$

14-32 (a) Veja a Figura R-14-32. (b) Não.



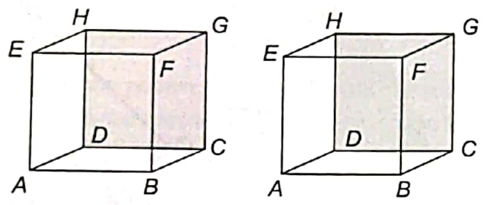
(a)

Figura R-14-32

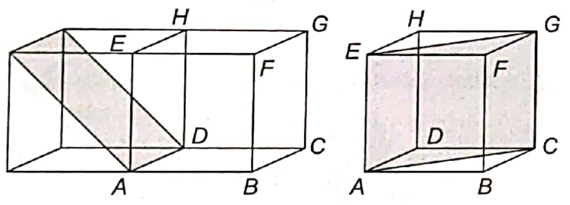
14-33 (a) Não. (b) Sim. (c) Sim. (d) Sim.

14-34 $aa + bb + cc = a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, pois os coeficientes a, b e c não são todos nulos.

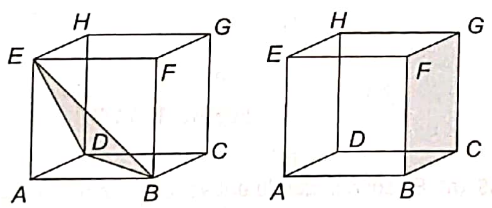
14-35 Veja a Figura R-14-35; na parte (d), M e N são pontos médios de arestas.



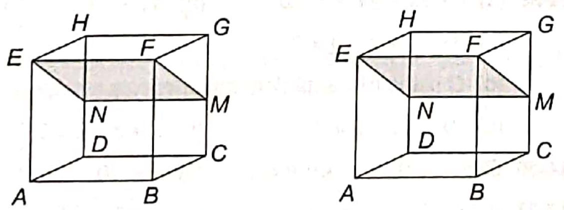
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura R-14-35

14-36 (a) $2x - y - 3z + 7 = 0$ (b) $y - 2 = 0$
(c) $y - 2z = 0$ (d) $7x + 8y - 5z = 0$

14-37

(a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 5 + 4\lambda + 2\mu \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = \mu \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

14-38 (a) π_1: $x + y + z - 1 = 0$ π_2: $x - y - z = 0$
π_3: $x + 2y - z - 2 = 0$

(b) $(1/2, 2/3, -1/6)$. Um ponto está na interseção se, e somente se, satisfaz as três equações gerais. Resolvendo o sistema formado por elas, obtém-se a resposta.

14-39 $8x + 6y - z - 39 = 0$.

14-40 (a) $(3,1,2)$ (b) Não existem.
(c) Todos os pontos de r. (d) Não existem.

14-41 São os pontos da reta r: $X = (1,0,0) + \lambda(2,1,-3)$. Um ponto P pertence a π_1 se, e somente se, existem λ e μ tais que $P = (1 + 2\lambda, \lambda, \lambda + \mu)$. Mostre que P pertence também a π_2 se, e somente se, $\mu = -4\lambda$, ou seja, $P = (1 + 2\lambda, \lambda, -3\lambda)$, o que equivale a P pertencer a r.

Capítulo 15

15-1 (a) Concorrentes em $(2,3,3)$.
(b) Não são concorrentes. São iguais.
(c) Concorrentes em $(22,-21,11)$.
(d) Não são concorrentes.

15-2 (a) As trajetórias não são concorrentes; as partículas colidem no ponto $(7/2, 1/4, 29/4)$, no instante $t = 3/4$. As trajetórias são iguais, e a segunda partícula, mais veloz, "persegue" a primeira até alcançá-la.
(b) $X = (-4,4,-4) + t(10,-5,15)$ $(t \in \mathbb{R})$.

15-3 $\alpha = -1/2$; $t = 2$.

15-4 (a) $(-2,2,-7)$ $-17x + 7y + 6z - 6 = 0$
(b) $(-2,6,-6)$ $-4x + y + 3z + 4 = 0$
(c) $(1,4,0)$ $4x - 7y + 6z + 24 = 0$

15-5 $A = (8,-7,3)$, $B = (-3,2,3)$. B é o ponto comum às retas r e s. Para obter A, determine antes M, o ponto médio de AC: M pertence a s e $\overrightarrow{CM}$ é ortogonal a um vetor diretor de r.

15-6 (a) $\{(-2,0,1)\}$ (b) É a reta r.
(c) $\{(5,4,3)\}$ (d) É o conjunto vazio.
(e) $\{(-2/3,-1/3,2)\}$

15-7 Como a velocidade é unitária, a duração do processo é igual à soma dos comprimentos de AB e BP; B é o ponto em que a reta r: $X = A + \lambda\vec{u}$ intercepta π.