As coordenadas de $G$ em relação a $\Sigma$ são as coordenadas de $\overrightarrow{OG}$ na base B e, devido à homogeneidade da tampa, $G$ é o ponto comum às diagonais $ST$ e $RU$. Se $M$ e $N$ são, respectivamente, os pontos médios de $OC$ e $SR$, então $\overrightarrow{OM} = 3\vec{j}$, $\overrightarrow{MN} = 2\vec{k}$ e (acompanhe na Figura 13-2 (b)) $\overrightarrow{NG} = 2\cos 45°\vec{i} + 2\text{sen}45°\vec{k} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{k}$. Logo,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NG} = 3\vec{j} + 2\vec{k} + (\sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{k}) = \sqrt{2}\vec{i} + 3\vec{j} + (2 + \sqrt{2})\vec{k}$$

e, portanto, $G = (\sqrt{2}, 3, 2 + \sqrt{2})_\Sigma$.

Note que as coordenadas de $G$ não dependem do peso da tampa, mas somente de suas características geométricas (tamanho e posição).

## EXERCÍCIOS

Nos exercícios 13-1 a 13-6 está fixado um sistema de coordenadas $\Sigma$ de origem $O$.

**13-1** Como você pode reconhecer, pelas coordenadas, que um ponto pertence a um dos eixos coordenados? E a um dos planos coordenados?

**13-2** Se o sistema é ortogonal, quais são as coordenadas dos pontos simétricos de $P = (x,y,z)$ em relação a cada plano coordenado?

**13-3** Se o sistema é ortogonal, quais são as coordenadas dos pontos simétricos de $P = (x,y,z)$ em relação a cada eixo coordenado?

**13-4** Quais são as coordenadas do ponto simétrico de $P = (x,y,z)$ em relação à origem do sistema?

**13-5** Suponha que o sistema de coordenadas seja ortogonal, e que $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ e $P_6$ sejam, respectivamente, as projeções ortogonais de $P = (x,y,z)$ sobre $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$, $Ox$, $Oy$ e $Oz$.

(a) Escreva as coordenadas de $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ e $P_6$.

(b) Se $P$ é um dos vértices de um cubo de centro $O$ e faces paralelas aos planos coordenados, escreva as triplas de coordenadas dos outros sete vértices.

**13-6** Seja $P = (x,y,z)$. Complete:

(a) O ponto $P_1 = (x,y,0)$ é a projeção de $P$ sobre o plano coordenado .......... segundo a direção do eixo coordenado .......... .

(b) O ponto $P_2 = (x,0,z)$ é a projeção de $P$ sobre o plano coordenado .......... segundo a direção do eixo coordenado .......... .

(c) O ponto $P_3 = (0,y,z)$ é a projeção de $P$ sobre o plano coordenado .......... segundo a direção do eixo coordenado .......... .

**13-7** Na Figura 13-3, $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo. Sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$. Determine as coordenadas dos pontos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ e $H$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

(a) $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

(b) $(H,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

(c) $(G,-\vec{e}_3,\vec{e}_1/2,2\vec{e}_2)$

(d) $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_1)$

**13-6** Exercício Resolvido

(a) Sejam $A = (-1,4,7)$ e $B = (3,-2,-1)$. Determine a tripla de coordenadas de $M$, ponto médio de $AB$.

(b) Dados $A = (x_1,y_1,z_1)$ e $B = (x_2,y_2,z_2)$, mostre que, se $M$ é o ponto médio de $AB$, então

$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}) \qquad [13\text{-}1]$$

*Resolução*

(a) Acompanhe na Figura 13-4 (a): como $M = A + \overrightarrow{AM} = A + \overrightarrow{AB}/2$, concluímos que $M = (-1,4,7) + (3 + 1,-2 - 4,-1 - 7)/2 = (-1,4,7) + (2,-3,-4) = (1,1,3)$.

(b) Seja $M = (x,y,z)$. Como $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $M = A + \overrightarrow{AB}/2$, a primeira coordenada de $M$ é $x = x_1 + (x_2 - x_1)/2 = (x_1 + x_2)/2$. Analogamente, obtemos $y = (y_1 + y_2)/2$ e $z = (z_1 + z_2)/2$, comprovando que vale a igualdade [13-1].

**EXERCÍCIO 13-9**

(a) Dados $A = (2,5,3)$ e $B = (1,1,0)$, calcule as coordenadas dos pontos $C$ e $D$, que determinam em $AB$ três segmentos congruentes (Figura 13-4 (b)).

(b) Sejam $A = (x_1,y_1,z_1)$, $B = (x_2,y_2,z_2)$ e $X$ o ponto que divide $AB$ na razão $r$ (Capítulo 5). Calcule as coordenadas de $X$ em função de $r$ e das coordenadas de $A$ e $B$.

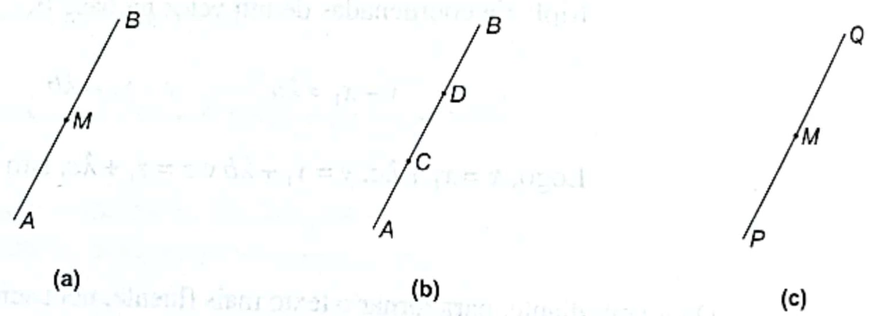



**Figura 13-4**

**13-7** Exercício Resolvido

Determine as coordenadas de $Q$, simétrico de $P = (1,0,3)$ em relação a $M = (1,2,-1)$ (Figura 13-4 (c)).

*Resolução*

$$Q = M + \overrightarrow{MQ} = M + \overrightarrow{PM} = (1,2,-1) + (0,2,-4) = (1,4,-5)$$

**EXERCÍCIO 13-10**

Determine as coordenadas do ponto $Q$, simétrico de $P = (x,y,z)$ em relação a $M = (x_0,y_0,z_0)$.

**13-8** Exercício Resolvido

Sejam, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, $A = (-1,0,2)$, $B = (1,1,1)$ e $C = (1,0,1)$. Mostre que $A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo, que é retângulo e não é isósceles.

**EXERCÍCIOS**

**13-11** Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, $A = (1,2,-1)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (2,0,0)$. Mostre que $A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo eqüilátero.

**13-12** Sejam $A = (1,6,4)$, $B = (2,-1,9)$, $C = (1,1,-1)$ e $D = (1,1,a)$. Para que valores de $a$ esses pontos são vértices de um quadrilátero? Este quadrilátero é plano ou reverso?

**13-13** Sejam $A = (-1,0,0)$, $B = (2,-1,-1)$, $C = (0,3,1)$ e $D = (4,5,1)$.

(a) Mostre que esses pontos são vértices de um quadrilátero plano.

(b) Mostre que o quadrilátero do item (a) é convexo (um quadrilátero plano é *convexo* se nenhuma das retas que contêm seus lados separa os outros dois vértices, o que equivale a nenhum de seus vértices ser interior ao triângulo determinado pelos outros três).

(c) Sabe-se da Geometria Plana que a reta que contém uma diagonal qualquer de um quadrilátero convexo separa os outros dois vértices. Utilize essa propriedade e o critério do Exercício Resolvido 6-16 para descobrir quais são os lados e quais são as diagonais do quadrilátero do item (a).

**13-14** Mostre que os pontos $A = (2,6,-5)$, $B = (6,9,7)$, $C = (5,5,0)$ e $D = (3,10,2)$ são vértices de um paralelogramo.

**13-15** Sejam $A = (3,0,-1)$, $B = (0,3,0)$, $C = (5,1,-2)$ e $D = (-4,1,2)$. Mostre que esses pontos são vértices de um trapézio e diga quais são as bases, os lados não-paralelos e as diagonais.

**13-16** O quadrilátero $ABCD$ é convexo. Sabendo que $4\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, diga quais são suas diagonais e quais são seus lados.

**13-17** Sejam $A = (x_1,y_1,z_1)$, $B = (x_2,y_2,z_2)$ e $C = (x_3,y_3,z_3)$ pontos quaisquer. Examine se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes. Justifique sua resposta e interprete geometricamente.

(a) Se o determinante formado pelas coordenadas de $A$, $B$ e $C$ é nulo, isto é,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

então $A$, $B$ e $C$ são colineares.

(b) Se $A$, $B$ e $C$ são colineares, então $\Delta = 0$.

**13-10 Observação** Na Geometria Analítica Plana aprende-se a regra conhecida como *condição de alinhamento de três pontos*:

Sejam $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$ e $C = (x_3,y_3)$ pontos de um plano $\pi$ no qual se adotou um sistema de coordenadas. Então, $A$, $B$ e $C$ são colineares se, e somente se,

## Capítulo 13

**13-1** Pela aparição de coordenadas nulas. Pontos de $Ox$ têm ordenada e cota nulas: $(x,0,0)$; pontos de $Oy$ têm abscissa e cota nulas: $(0,y,0)$; pontos de $Oz$ têm abscissa e ordenada nulas: $(0,0,z)$; pontos do plano $Oxy$ têm cota nula: $(x,y,0)$; do plano $Oyz$, abscissa nula: $(0,y,z)$; do plano $Oxz$, ordenada nula: $(x,0,z)$.

**13-2** Em relação ao plano $Oxy$: $(x,y,-z)$. Em relação ao plano $Oxz$: $(x,-y,z)$. Em relação ao plano $Oyz$: $(-x,y,z)$. Faça uma figura para se convencer de que isto é falso quando o sistema não é ortogonal.

**13-3** Em relação a $Ox$: $(x,-y,-z)$. Em relação a $Oy$: $(-x,y,-z)$. Em relação a $Oz$: $(-x,-y,z)$. Isto é falso quando o sistema não é ortogonal.

**13-4** $(-x,-y,-z)$. Vale mesmo que o sistema não seja ortogonal.

**13-5** (a) $P_1 = (x,y,0)$ $P_2 = (x,0,z)$ $P_3 = (0,y,z)$
$P_4 = (x,0,0)$ $P_5 = (0,y,0)$ $P_6 = (0,0,z)$

(b) $(-x,y,z)$ $(x,-y,z)$ $(x,y,-z)$ $(x,-y,-z)$
$(-x,y,-z)$ $(-x,-y,z)$ $(-x,-y,-z)$

**13-6** (a) $Oxy$, $Oz$. (b) $Oxz$, $Oy$. (c) $Oyz$, $Ox$.

Observe que, neste exercício, as projeções podem ser oblíquas. Faça uma figura.

**13-7** (a) $A = (0,0,0)$ $B = (1,0,0)$ $C = (0,1,0)$ $D = (-1,1,0)$
$E = (-1,0,1)$ $F = (0,0,1)$ $G = (-1,1,1)$ $H = (-2,1,1)$

(b) $A = (2,-1,-1)$ $B = (3,-1,-1)$ $C = (2,0,-1)$ $D = (1,0,-1)$
$E = (1,-1,0)$ $F = (2,-1,0)$ $G = (1,0,0)$ $H = (0,0,0)$

Observe que essas respostas são obtidas das de (a) somando-se o vetor $(2,-1,-1)$; explique por quê.

(c) $A = (1,2,-1/2)$ $B = (1,4,-1/2)$ $C = (1,2,0)$ $D = (1,0,0)$
$E = (0,0,-1/2)$ $F = (0,2,-1/2)$ $G = (0,0,0)$ $H = (0,-2,0)$

(d) $A = (0,0,0)$ $B = (0,0,1)$ $C = (1,0,0)$ $D = (1,0,-1)$
$E = (0,1,-1)$ $F = (0,1,0)$ $G = (1,1,-1)$ $H = (1,1,-2)$

**13-8** $(-4,6,1)$

**13-9** (a) $C = (5/3,11/3,2)$ $D = (4/3,7/3,1)$

(b) $x = (x_1 + rx_2)/(1 + r)$ $y = (y_1 + ry_2)/(1 + r)$
$z = (z_1 + rz_2)/(1 + r)$

**13-10** $Q = (2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)$

**13-12** $a \neq -1$; reverso.

Os pontos são vértices de um quadrilátero se, e somente se, são três a três não-colineares, ou seja: $A$, $B$ e $C$ não são colineares, $A$, $B$ e $D$ não são colineares, $A$, $C$ e $D$ não são colineares, e $B$, $C$ e $D$ não são colineares. Isso quer dizer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ é LI, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ é LI, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ é LI e $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ é LI, o que acontece se, e somente se, $a \neq -1$. Neste caso, o determinante das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (nessa ordem), que é igual a $-5(a + 1)$, é diferente de 0. Logo, os três vetores são LI, e, portanto, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ não são coplanares: o quadrilátero é reverso.

**13-13** (b) Como somente no item (c) você saberá quais são os lados do quadrilátero, utilize o Exercício 5-5.

(c) Os lados são $AB$, $BD$, $DC$ e $CA$; as diagonais, $AD$ e $BC$. Exprimindo (por exemplo) $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, você encontra coeficientes de mesmo sinal: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Pelo critério do Exercício Resolvido 6-16, a reta $AD$ separa $B$ e $C$, e, portanto, o segmento $AD$ é uma diagonal. A outra é $BC$, e os quatro segmentos restantes são os lados. Como se vê, descobrir de início uma combinação linear cujos coeficientes tenham mesmo sinal simplifica a resolução. Se eles tivessem sinais contrários, você poderia "corrigir" isso passando vetores de um membro para o outro. Assim, por exemplo, da igualdade $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$ decorre $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}/2$, o que mostra que $\overrightarrow{BC}$ é diagonal.

**13-14** Mostre que dois dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ são LI e que um dos três é a soma dos outros dois.

**13-15** Verifique que $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AC}$ e que $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})$ é LI. Disso decorre que se trata de um quadrilátero plano, com dois lados opostos paralelos de comprimentos diferentes (pois $\|\overrightarrow{DB}\| = 2\|\overrightarrow{AC}\|$), ou seja, um trapézio. A base maior é $DB$ e a base menor é $AC$. Como os segmentos orientados $(D,B)$ e $(A,C)$ são de mesmo sentido (pois isso acontece com $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{AC}$), os segmentos $DA$ e $BC$ são disjuntos (Definição 1-2 (c)), não podendo, portanto, ser diagonais. Logo, os lados não-paralelos são $DA$ e $BC$. Por exclusão, as diagonais são $AB$ e $CD$. Você também pode resolver este exercício pelo método indicado na resposta do Exercício 13-13 (c).

**13-16** $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CD}$. Os coeficientes da combinação linear são de mesmo sinal; logo, pelo Exercício Resolvido 6-16, a reta $CB$ separa $A$ e $D$. Concluímos que $CB$ é uma diagonal e $AD$ é a outra. Os lados são, portanto, $AB$, $AC$, $BD$ e $CD$.

**13-17** (a) Falsa. Contra-exemplo: os pontos $A = (1,2,2)$, $B = (3,4,1)$ e $C = (1,0,-3)$ não são colineares (pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI), mas o determinante correspondente é nulo. Outro argumento, fatal: se a afirmação fosse verdadeira, tomando $C = (0,0,0)$ e dois pontos $A$ e $B$ quaisquer de $\mathbb{E}^3$, concluiríamos que esses três pontos são colineares e, portanto, $\mathbb{E}^3$ seria uma reta. Assim, o determinante formado pelas coordenadas de três pontos *não tem* nenhum significado geométrico e *não serve* para verificar a colinearidade dos três pontos. Para fazer isso, o correto (e muito mais simples) é analisar a dependência linear de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

(b) Verdadeira. Se $A$, $B$ e $C$ são colineares, então os pontos $O$, $A$, $B$ e $C$ são coplanares e, por isso, os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD. Logo, pela Proposição 7-6, $\Delta = 0$. Desta vez, estamos enxergando, nas linhas de $\Delta$, coordenadas de *vetores*.

## Capítulo 14

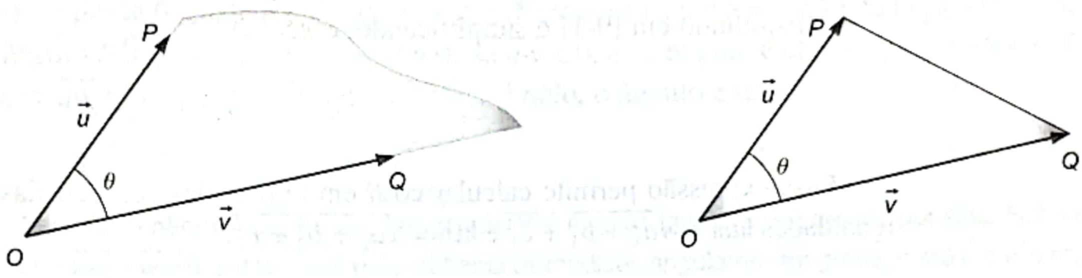
**14-1** Amanda errou apenas o Exercício B.

**14-2** (a) Forma vetorial: $(x,y,z) = (4,-7,-6) + \lambda(1,-1,-1)$.

Forma simétrica: $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+7}{1} = \dfrac{z+6}{1}$.

A definição seguinte, que é independente da escolha dos representantes, servirá bem aos nossos propósitos.

**9-1** ***Definição*** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Chama-se **medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$** a medida $\theta$ do ângulo $P\hat{O}Q$, sendo $(O,P)$ e $(O,Q)$, respectivamente, representantes quaisquer de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *com mesma origem* (Figura 9-2 (a)). Sobre o número $\theta$ impõe-se a restrição $0 \leq \theta \leq \pi$ se a unidade adotada for *radiano*, ou $0 \leq \theta \leq 180$, se for *grau*. Indica-se $\theta$ por ang$(\vec{u},\vec{v})$, especificando, se necessário, a unidade adotada (grau ou radiano).




(a) (b)

**Figura 9-2**

Embora tenhamos abdicado de definir ângulo entre dois vetores não-nulos, optando por trabalhar com o conceito de medida angular, vamos preservar, por conveniência, alguns termos utilizados na Geometria (será um abuso de linguagem benéfico). Assim, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos e a medida angular $\theta$ entre eles, em graus [respectivamente, em radianos], é menor que 90 [respectivamente, menor que $\pi/2$], diremos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *formam ângulo agudo*. Empregaremos também expressões como "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo reto", "$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo obtuso", "$\vec{u}$ forma ângulos congruentes com $\vec{v}$ e $\vec{w}$", "$\vec{u}$ forma ângulos suplementares com $\vec{v}$ e $\vec{w}$" etc.

## EXERCÍCIOS

**9-1** Verdadeiro ou falso?

(a) A medida angular entre um vetor não-nulo e ele mesmo é 0 (graus ou radianos).

(b) A medida angular entre dois vetores não-nulos e ortogonais é $\pi/2$ radianos.

(c) A medida angular entre dois vetores de sentido contrário é 180 graus.

(d) Não existem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que ang$(\vec{u},\vec{v})$ = arcsen(–1/2).

**9-2** Em uma roleta de centro *O*, o preto 17 ocupa a posição *P*. Após um giro de $7\pi/5$ radianos, passa a ocupar a posição *Q*. Qual é a medida angular em radianos entre $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$?

**9-3** Seja *ABCDEF* um hexágono regular de centro *O*, como na Figura 2-10. Obtenha as seguintes medidas angulares em graus:

(a) ang$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DE})$

(b) ang$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF})$

(c) ang$(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF})$

(d) ang$(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BF})$

**Exercício**

**9-8** São dadas as bases ortonormais E e F. Determine *a* e *b*, sabendo que $\vec{u} = (1,1,2)_E = (b,a,1)_F$ e $\vec{v} = (1,2,3)_E = (3,1,2)_F$.

**9-5** *Exercício Resolvido*

Em relação a uma base ortonormal, são dados $\vec{u} = (2,0,-3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

*Resolução*

Sendo

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,0,-3)\cdot(1,1,1) = 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + (-3)\cdot 1 = -1 \qquad \text{(pela Proposição 9-4)}$$

$$\|\vec{u}\| = \|(2,0,-3)\| = \sqrt{2^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{(por [7-4])}$$

$$\|\vec{v}\| = \|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \text{(por [7-4])}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{39}} \qquad \text{(por [9-3])}$$

concluímos que $\theta = \arccos(-1/\sqrt{39})$.

**Exercícios**

**9-9** São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(a) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-2,10,2)$.

(b) $\vec{u} = (3,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,-2)$.

(c) $\vec{u} = (-1,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$.

(d) $\vec{u} = (\sqrt{3}/2,1/2,0)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}/2,1/2,\sqrt{3})$.

(e) $\vec{u} = (300,300,0)$, $\vec{v} = (-2000,-1000,2000)$.

**9-10** Sejam $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x,y,z)_B \neq \vec{0}$, $\alpha = \text{ang}(\vec{u},\vec{i})$, $\beta = \text{ang}(\vec{u},\vec{j})$ e $\gamma = \text{ang}(\vec{u},\vec{k})$. Cada um dos números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ chama-se **co-seno diretor de $\vec{u}$ relativamente a B**, e $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ chama-se **tripla de co-senos diretores de $\vec{u}$ relativamente a B.** Mostre que:

(a) $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\quad\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(Aplique este resultado a $(1,-3,\sqrt{6})$ e a seu oposto.)

(b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(c) Os co-senos diretores de $\vec{u}$ relativamente a B são as coordenadas do versor de $\vec{u}$ na base B.

(d) Se $(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1)$ e $(\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2)$ são, respectivamente, as triplas de co-senos diretores de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ relativamente à base B e $\theta$ é a medida angular entre $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, então $\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$, ou seja, devido a (c), $\cos\theta$ é o produto escalar dos versores de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (isso é também uma conseqüência imediata de [9-3]).

(e) Se F é base formada de vetores unitários (em particular, se F é ortonormal), a primeira coluna de $M_{BF}$ é formada pelos co-senos diretores do primeiro vetor de F relativamente a B. Resultado análogo vale para as outras colunas.

**9-6** *Exercício Resolvido*

Sendo E uma base ortonormal, determine $x$ para que os vetores $\vec{u} = (x,10,200)_E$ e $\vec{v} = (-10,x,0)_E$ sejam ortogonais.

*Resolução*

De $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x,10,200)_E\cdot(-10,x,0)_E = x(-10) + 10x + 200\cdot 0 = 0$ resulta, pela Proposição 9-3 (c), que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais para todo $x$ real.

**EXERCÍCIOS**

Nos exercícios 9-11 a 9-19, todas as coordenadas referem-se a uma base ortonormal fixada.

**9-11** Determine $x$ de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

(a) $\vec{u} = (x,0,3)$, $\vec{v} = (1,x,3)$.
(b) $\vec{u} = (x,x,4)$, $\vec{v} = (4,x,1)$.
(c) $\vec{u} = (x+1,1,2)$, $\vec{v} = (x-1,-1,-2)$.
(d) $\vec{u} = (x,-1,4)$, $\vec{v} = (x,-3,1)$.

**9-12** Determine $\vec{u}$ ortogonal a $(-3,0,1)$ tal que $\vec{u}\cdot(1,4,5) = 24$ e $\vec{u}\cdot(-1,1,0) = 1$.

**9-13** (a) Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2,3,-1)$ e a $\vec{v} = (2,-4,6)$.
(b) Qual dos vetores obtidos no item (a) forma ângulo agudo com $(1,0,0)$?

**9-14** Obtenha a tripla de coordenadas do vetor que tem norma $\sqrt{3}$, é ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$, e forma ângulo obtuso com $(0,1,0)$.

**9-15** Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4,-1,5)$ e $\vec{w} = (1,-2,3)$ tal que $\vec{u}\cdot(1,1,1) = -1$.

**9-16** Dados $\vec{v} = (1,1,1)$, $\vec{w} = (0,1,-1)$ e $\vec{t} = (2,1,-1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ seja LD. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1,0,0)$?

**9-17** Obtenha $\vec{u}$ ortogonal a $(1,1,0)$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ e a medida angular em graus entre $\vec{u}$ e $(1,-1,0)$ seja 45.

**9-18** Descreva o conjunto de todos os vetores $\vec{w}$ ortogonais a $\vec{v} = (2,1,2)$ tais que $\vec{u} = (1,1,-1)$ seja combinação linear de $\vec{v}$, $\vec{w}$.

**9-19** Decomponha $\vec{u} = (1,0,3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.

**9-7** ***Proposição*** Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o número real $\lambda$, valem as propriedades:

(a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
(b) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
(c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
(d) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$.

(Usando o Princípio de Indução Finita, pode-se estender a propriedade (a) para qualquer número de parcelas: $\vec{u}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n) = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \vec{u}\cdot\vec{v}_2 + \ldots + \vec{u}\cdot\vec{v}_n$.)

*Demonstração*

Demonstraremos apenas o item (a), deixando os restantes para você. Suponhamos que, em relação a uma base ortonormal fixada, $\vec{u} = (a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v} = (a_2,b_2,c_2)$, $\vec{w} = (a_3,b_3,c_3)$. Então, $\vec{v} + \vec{w} = (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3)$ e

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) &= (a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3) \\
&= a_1(a_2 + a_3) + b_1(b_2 + b_3) + c_1(c_2 + c_3) \\
&= a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3 + c_1c_2 + c_1c_3 \\
&= (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}
\end{aligned}$$

■

## EXERCÍCIOS

**9-20** (a) Prove os itens (b), (c) e (d) da proposição anterior.

(b) Prove que, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os escalares $\alpha$ e $\beta$, vale a igualdade $\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u}\cdot\vec{v} + \beta\vec{u}\cdot\vec{w}$. Esta propriedade é chamada **bilinearidade do produto escalar.** (Usando o Princípio de Indução Finita, pode-se provar que a propriedade vale para qualquer número de parcelas: $\vec{u}\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n) = \alpha_1\vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{u}\cdot\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{u}\cdot\vec{v}_n$.)

**9-21** Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta.

(a) $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ (b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

(c) $\vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w}$ (d) $\vec{u} = -\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} \le 0$

**9-22** Observe a Proposição 9-7. Apenas como exercício, pois esta nomenclatura não é habitualmente usada, relacione as palavras *comutativa* e *distributiva* a um ou mais itens do enunciado. Explique a ausência de uma propriedade *associativa*, que seria "$(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$".

**9-23** Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitários, $\|\vec{w}\| = 4$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -2$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = -4$, e $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \pi/3$ radianos, calcule:

(a) $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\cdot\vec{u}$ (b) $(2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})\cdot(-\vec{u} + \vec{v})$

(c) $(5\vec{u} - \vec{w})\cdot(\vec{w} - 2\vec{u})$ (d) $(\vec{w} - \vec{v} + \vec{u})\cdot(-\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{v})$

**9-8 Observação** A operação que a cada par de vetores $(\vec{u},\vec{v})$ associa o número real $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tem comportamento algébrico um tanto fora dos padrões aos quais você deve estar habituado. Como assegura a Proposição 9-7, podemos alterar a ordem dos fatores (item (c)), podemos tirar parênteses "distribuindo" ou pôr em evidência um fator comum (item (a)), ou ainda "puxar" um coeficiente para fora dos parênteses (item (b)). Há, porém, coisas que não podem ser feitas; destaquemos algumas.

- Na igualdade $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ não podemos cancelar $\vec{u}$ e concluir que $\vec{v} = \vec{w}$, nem mesmo se soubermos que $\vec{u} \neq \vec{0}$ (para obter um contra-exemplo, tome dois vetores distintos $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e um terceiro, $\vec{u}$, ortogonal a ambos). De $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ podemos, isto sim, concluir que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$, pois $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = 0$ (usamos o Exercício 9-21 (c)); veja a Proposição 9-3 (c).
- De $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ não se pode concluir que algum dos dois vetores seja nulo. Veja a resposta do Exercício 9-21 (b).

(b) qualquer combinação linear de vetores de **T** pertence a **T**;

* (c) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores LI de **T**, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI;
* (d) três vetores quaisquer de **T** são LD;
* (e) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI de **T**, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram **T**, isto é, todo vetor de **T** é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ (compare com o Exercício 6-18).

**9-26** Prove que as coordenadas de qualquer vetor $\vec{u}$ na base ortonormal B = $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ são iguais aos produtos escalares de $\vec{u}$ por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, ou seja: $\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{k}$.

**9-10** *Observação*

Conforme o Exercício 9-24(b), qualquer tripla de vetores não-nulos dois a dois ortogonais é base. Logo, se E é uma tripla de vetores unitários dois a dois ortogonais, então E é base, neste caso, ortonormal. Logo, as bases ortonormais podem ser caracterizadas, com o auxílio do produto escalar, por

$$\text{E} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) \text{ é uma base ortonormal} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1 \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{[9-8]}$$

## Exercícios

**9-27** Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não-nulos tais que $\vec{u} = \alpha\vec{a}$ e $\vec{v} = \beta\vec{b}$. Mostre que ang$(\vec{u},\vec{v})$ = ang$(\vec{a},\vec{b})$ se $\alpha\beta > 0$ e ang$(\vec{u},\vec{v}) = \pi -$ ang$(\vec{a},\vec{b})$ se $\alpha\beta < 0$ (estamos usando o radiano como unidade de medida angular). Conclua que ang$(\vec{u},\vec{v})$ = ang$\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$. Interprete geometricamente.

**9-28** Sabendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = 3/2$, $\|\vec{v}\| = 1/2$ e $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u}$.

**9-29** Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores de norma 1 tais que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 1/2$. Verifique se $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$.

**9-30** Na Figura 9-3, a circunferência de centro $O$ tem raio $r$. Calcule $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ em função de $r$ e das medidas $\alpha$ e $\beta$ dos ângulos indicados. Aplique o resultado para provar que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

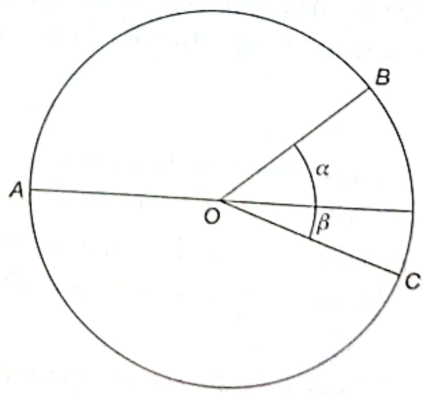



**Figura 9-3**

**7-15** $a \neq b$

**7-16** $-1$, $1/2$ e $1/2$ (nessa ordem).

**7-17** (a) $m \neq -4/7$ (b) $m = 1$

**7-18** (a) $m \neq 2$ (b) Não existem.

**7-19** (b) $m = -1/4$

**7-20** (a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 5 (d) $\sqrt{21}$

**7-21** (a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AD}$ não são paralelos a um mesmo plano; logo, são LI. Por isso, formam uma base, que não é ortonormal, pois $\overrightarrow{AB}$, por exemplo, não é unitário.

(b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

(c) $d^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$.

(d) [7-4] só pode ser usada se a base for ortonormal.

## Capítulo 8

**8-2** $a = 3/2$, $b = -1$, $c = -1/2$.

**8-3** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{u} = 12\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$

**8-4** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{u} = 11\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$

**8-5** $m \neq -1$ e $m \neq 1$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}$

**8-6** $\vec{u} = \vec{f}_1/2 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3/14$

**8-7** $(2,-3,6)$

**8-8** (a) LI (b) LD

**8-9** Sim.

$\vec{u} = -\vec{a} - \vec{b}/3 + 2\vec{c}/3 \quad \vec{v} = \vec{a}/2 + \vec{b}/3 + \vec{c}/3 \quad \vec{w} = -\vec{b}/3 + 2\vec{c}/3$

**8-10** (a) Verdadeira. Escreva $\vec{f}_j$ e $\vec{g}_j$ como combinação linear dos vetores de E.

(b) Verdadeira. Se $M_{EF} = M_{GF}$, então $M_{EF}^{-1} = M_{GF}^{-1}$, ou seja, $M_{FE} = M_{FG}$, e recaímos no caso (a).

(c) Verdadeira. Lembrando que $I_3 = M_{EE}$, obtemos $M_{EF} = M_{EE}$, recaindo no caso (a).

(d) Falsa. Contra-exemplo: $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

**8-11** (a) $M_{EF} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ (b) $(-1/2, 1/2, -1)_F$

**8-12** $M_{FE} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_{EF} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{EG} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_{GE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{FG} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+1)/2 & (\sqrt{3}+1)/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ (\sqrt{3}-1)/2 & (\sqrt{3}-1)/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$M_{GF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & \sqrt{3}/2 \\ (\sqrt{3}-1)/2 & 0 & -(\sqrt{3}+1)/2 \end{bmatrix}$

$M_{EE} = M_{FF} = M_{GG} = I_3$

## Capítulo 9

**9-1** (a) V (b) V (c) V (d) V

**9-2** $0{,}6\,\pi$ radianos.

**9-3** (a) 150° (b) 90° (c) 60° (d) 30°

**9-4** 45° e 45°, ou 135° e 135°.

**9-5** $-1/2$.

**9-6** $-6$

**9-7** $\vec{v} = (ba^{-1})\vec{u}$ dá o maior valor, que é $ab$; $\vec{v} = -(ba^{-1})\vec{u}$ dá o menor valor, que é $-ab$.

**9-8** $a = 1$ e $b = 2$, ou $a = 2/5$ e $b = 11/5$.

**9-9** (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) arccos(1/3) (d) $\pi/3$ (e) $3\pi/4$

Para o item (e), note que $\vec{u} = 300(1,1,0)$ e $\vec{v} = 1000(-2,-1,2)$; use isso para simplificar as contas.

**9-10** (a) $1/4$, $-3/4$ e $\sqrt{6}/4$; $-1/4$, $3/4$ e $-\sqrt{6}/4$.

**9-11** (a) $-9$ (b) $-2$ (c) $\pm\sqrt{6}$ (d) Não existe.

**9-12** $(1,2,3)$

**9-13** (a) $(3,-3,-3)$ e $(-3,3,3)$ (b) $(3,-3,3)$

**9-14** $(1,-1,1)$

**9-15** $(1,-1,-1)$

**9-16** $\vec{u} = (1,0,2)$ ou $\vec{u} = (-1,0,-2)$. Sim, o segundo.

**9-17** $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$ e $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -1)$.

**9-18** É o conjunto dos vetores $\lambda(7,8,-11)$, com $\lambda \neq 0$.

**9-19** $\vec{u} = (1/2, 3/2, 2) + (1/2, -3/2, 1)$.

**9-21** (a) Verdadeiro. Utilize a Definição 9-2 (a) (para $\Leftarrow$) e a Proposição 9-7 (d) (para $\Rightarrow$).

(b) Falso; contra-exemplo: $\vec{u} = (1,1,1)_E$ e $\vec{v} = (1,1,-2)_E$, sendo E uma base ortonormal; $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos e $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(c) Verdadeiro; escreva $\vec{u}\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u}\cdot[\vec{v} + (-1)\vec{w}]$ e aplique a Proposição 9-7, (a) e (b).

(d) Verdadeiro; conseqüência da Proposição 9-7 (b) e (d).

**9-22** Comutativa – item (c); distributiva – item (a). A propriedade associativa não tem lugar na álgebra do produto escalar, pois não existe produto escalar de três ou mais vetores. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}$ é um número real, não podemos nem pensar em calcular o produto escalar desse número por $\vec{w}$.

**9-23** (a) $-1/2$ (b) $-7/2$ (c) $-40$ (d) 33

**9-24** (a) Sim. Para uma resolução rápida, veja o Exercício 7-14. Para exercitar-se com determinantes, siga os passos da resolução do Exercício Resolvido 9-9.

(b) Sim, vale também para dois vetores.

**9-25** (a) Use a Proposição 9-7 (d).

(b) Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ são vetores de **T**, então $(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)\cdot\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1\cdot\vec{w} + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n\cdot\vec{w} = 0$

(c) Se $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ fosse LD, $\vec{w}$ seria combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Então, $\vec{w}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \ldots = 0$, contrariando (a).

(d) Se existissem $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ LI em **T**, $\vec{w}$ seria gerado por eles: $\vec{w} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Siga os passos da resposta (c).

(e) Seja $\vec{z}$ um vetor qualquer de **T**. Pelo item anterior, $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ é LD e, como $(\vec{u},\vec{v})$ é LI, $\vec{z}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$.

**9-28** $-13/4$. Você pode partir de $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\cdot(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = 0$ e desenvolver, usando a Proposição 9-7. Outro modo é proceder como na resolução do Exercício Resolvido 9-9.

**9-29** Não, pois $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI.

**9-30** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = r^2[1 + \cos\alpha - \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)]$

**9-31** 52

**9-32** (a) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}/2$ $\qquad \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

(b) $\arccos(-3/\sqrt{10})$

**9-33** $\arccos(3/\sqrt{22})$

**9-34** $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$; $\arccos(\sqrt{2}/4)$.

**9-35** Sendo $a$ a medida de uma aresta e $AB$ e $CD$ arestas opostas,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$= a^2\cos 120° + a^2\cos 60° = 0$$

**9-36** Escolha uma base ortonormal conveniente e exprima $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ nessa base. Usar o Exercício 9-10 (d) também é uma boa opção.

**9-37** $19/\sqrt{481}$

**9-38** Observe que (c) é a tradução de (b) para a linguagem geométrica.

**9-40** $\arccos(4/\sqrt{26})$

**9-42** Como $\vec{w}$ é paralelo ao plano $ABC$, é suficiente provar que $\text{ang}(\vec{u},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{v},\vec{w})$; para isso, calcule os co-senos. Note que, devido ao Exercício 9-27, $\text{ang}(\vec{u},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{a},\vec{w})$ e $\text{ang}(\vec{v},\vec{w}) = \text{ang}(\vec{b},\vec{w})$.

**9-44** Sejam $A$, $B$ e $C$ os vértices do triângulo, $M$ o ponto médio de $BC$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Em (a), você deve provar que, se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, então $(\vec{v} - \vec{u})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = 0$ e $\text{ang}(\vec{u},\vec{u} + \vec{v}) = \text{ang}(\vec{v},\vec{u} + \vec{v})$ (também se pode aplicar o Exercício 9-42, abreviando o trabalho). Em (b), se $\theta_1 = \text{ang}(-\vec{u},\vec{v} - \vec{u})$ e $\theta_2 = \text{ang}(-\vec{v},\vec{v} - \vec{u})$, prove que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

**9-45** Utilize o Exercício 9-42 para obter vetores paralelos às bissetrizes.

**9-46** Este é um caso particular do Exercício 9-42.

**9-47** (a) Exprima todos os vetores do primeiro membro em termos de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (para isso, basta fazer aparecer $A$ onde ainda não aparece) e desenvolva. É fácil escrever o primeiro membro sem tê-lo decorado: escreva as permutações cíclicas da "palavra" $ABC$ (isto é, $ABC$, $BCA$, $CAB$; cada uma é obtida da anterior levando-se a primeira letra para o final), acrescente a elas a letra $D$ ($ABCD$, $BCAD$, $CABD$), coloque as setas e complete com os símbolos $\cdot$ e $+$.

(c) No triângulo $ABC$, considere as retas-suportes das alturas relativas aos vértices $A$ e $B$. Seja $D$ seu ponto de interseção. Use a Relação de Euler para provar que $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$ e que, por isso, $D$ pertence à reta que contém a terceira altura.

**9-48** (b) Aplicando a parte (a) aos versores de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (veja o Exercício 9-27), obtém-se $0 \le 3 + 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

(c) Devido ao Exercício 7-14, basta considerar o caso em que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários. Procedendo como no Exercício Resolvido 9-9, você pode provar que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base se, e somente se, $\cos\alpha \ne 1$ e $\cos\alpha \ne -1/2$. Pelo item (b), isso equivale a $0 < \alpha < 120$ (em graus). Interprete geometricamente, pensando em um tripé articulado.

**9-49** (a) $\arccos(3/\sqrt{21})$ (b) $\sqrt{21}$

**9-51** (a) e (b): se um dos vetores é nulo, vale a igualdade. Senão, use a Definição 9-2(b).

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \le \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \le \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$. Usamos, na segunda desigualdade, o item (a).

(d) A tese equivale a $-\|\vec{u} - \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \le \|\vec{u} - \vec{v}\|$. Escrevendo $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$ e usando (c), você prova uma das desigualdades. Escrevendo $\vec{v} = (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u}$, prova a outra.

**9-52** (a) 0 (b) $\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$ (c) $-\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$

**9-53** (a) $(18/11,-6/11,6/11)$ (b) $(-10/9,5/9,10/9)$

(c) $(0,0,0)$ (d) $(1,2,4)$

**9-54** (a) $\vec{v} = (0,3/10,9/10) + (-1,-33/10,11/10)$

(b) $\vec{v} = (0,1,2) + (0,0,0)$ (c) $\vec{v} = (0,0,0) + (1,2,-1)$

**9-55** $(3/4,-\sqrt{3}/4,1/2)$ e $(3/4,\sqrt{3}/4,1/2)$.

**9-56** (a) É conseqüência imediata de [9-11].

(b) Utilize o Exercício 9-26 e a parte (a).

**9-58** Use (b) para resolver (c); a hipotenusa é $AB$.

**9-60** (a) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais ou iguais.

(b) $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais ou de mesmo comprimento.